



# Le problème de conjugaison dans les groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 satisfaisant l'hypothèse de géométrisation de Thurston

Jean-Philippe Preaux

## ► To cite this version:

Jean-Philippe Preaux. Le problème de conjugaison dans les groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 satisfaisant l'hypothèse de géométrisation de Thurston. Mathématiques [math]. Université de Provence, 2001. Français. NNT: . tel-01255732

**HAL Id: tel-01255732**

**<https://hal.science/tel-01255732>**

Submitted on 13 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
U.F.R. M.I.M.

## THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE

*Discipline:* **Mathématiques**

Ecole doctorale de Mathématiques et d'Informatique

Présentée par

Jean-Philippe PREAUX

le 18 décembre 2001

Titre:

**PROBLÈME DE CONJUGAISON DANS LE GROUPE  
D'UNE 3-VARIÉTÉ ORIENTÉE VÉRIFIANT  
L'HYPOTHÈSE DE GÉOMÉTRISATION DE THURSTON**

soutenue publiquement devant un jury composé de :

Président :	<b>Pierre De La HARPE</b> . Professeur – Université de Genève.
Rapporteurs :	<b>Martin BRIDSON</b> . Professeur – Université d'Oxford. (Excusé) <b>Gilbert LEVITT</b> . Professeur – Université Paul Sabatier, Toulouse.
Examineurs :	<b>Jérôme LOS</b> . Directeur de recherche au CNRS – LATP, Marseille. <b>Martin LUSTIG</b> . Professeur – Université d'Aix-Marseille III.
Directeur :	<b>Hamish SHORT</b> . Professeur – Université de Provence, Marseille.



*Afin d'entretenir la flamme de Prométhée.*

*«L'homme est le seul être qui éprouve le besoin  
d'accomplir des actes inutiles.»*

LECOMTE DE NOÛY *La dignité humaine*



# Remerciements

*«Nous tirons des autres presque tout le nécessaire, le langage aussi bien que le pain et beaucoup d'images de nous qui se peignent dans leur regard, dans leur conduite, dans leurs silences.»*

P. VALÉRY, *Mauvaises pensées.*

En regardant ce travail achevé, je ne puis m'empêcher de penser qu'il n'y avait au départ qu'une pile de feuilles blanches et une cartouche d'encre, qui peu à peu se sont mêlés, jour après jour, page après page, — ici en un théorème, là en une figure, ... — pour s'articuler en un document intelligible, et exploitable. Me revient alors, ce long travail d'assemblage, toutes les questions, les tentatives de compréhension, les études minutieuses, les erreurs, les brusques demi-tours, mais surtout cette jubilation devant chaque avancée, chaque réponse, comme un pan de mur s'effondrant, dévoilant un plus large paysage. Chaque avancée s'est concrétisée en quelques pages ; et les pages se sont regroupées en parties qui elles même se sont organisées. Chaque partie de ce travail, vue de plus près représente une période, plus ou moins longue, de ces quelques dernières années de ma vie ; un voyage. Comme celui mené autour de la topologie géométrique, ou autour des espaces fibrés de Seifert, etc... ; ils ont été parfois difficiles, mais ont tous en commun d'avoir été aussi enrichissants que stimulants.

De ces divers voyages, beaucoup de visages me reviennent, de discussions, d'échange. Beaucoup de personnes ont contribué de près ou de loin, d'une manière ou d'une autre, à l'élaboration de ce travail. Je tiens à consacrer un rien de ce papier, à les en remercier.

Tout d'abord je pense à ma famille, mes amis, mes proches, et au soutien qu'ils m'ont apporté, tout au long de ces années, et bien avant. Je n'ai pas été ces derniers temps toujours très disponible, et je leur prie de m'en excuser. Je compte bien me rattraper.

Premiers artisans de cette réalisation, je pense à tous mes enseignants de mathématiques. En particulier à mon professeur de 4<sup>e</sup> – 3<sup>e</sup>, Mme Gamisans, qui m'a tout appris des rouages des mathématiques, et avec laquelle j'ai découvert ce plaisir de résoudre des problèmes de géométrie euclidienne. Qu'elle soit remerciée de son remarquable travail. Je pense au regretté Michel Besson, qui fût mon professeur de 2<sup>nd</sup>e, mais aussi le premier à me dessiner un triangle hyperbolique. Je pense à André Astier sous la direction duquel j'ai beaucoup appris en effectuant mon mémoire de maîtrise, et dont j'ai suivi certains enseignements avec délectation.

Je tiens aussi à remercier tous les gens du C.M.I. (trop nombreux pour être

cités, elles-ils se reconnaîtront), qui ont contribué à faire de cet endroit un lieu où j'avais plaisir à me rendre le matin. Je tiens plus particulièrement à remercier Estelle Souche, et Xavier Leleu, avec lesquels nous sommes parvenus à nous partager un directeur de recherche déjà fort occupé.

Je remercie tout le personnel du C.M.I. qui m'a permis de travailler dans les meilleures conditions, plus particulièrement Aline Blanc, Nathalie Grimaud, Noëlle Tabaracci, et surtout Gérard Henry, sans lequel je serai resté parfois devant mon ordinateur tel un babouin devant un convertisseur Franc-Euro.

Merci à David Knuth, Leslie Lamport (etc...), à l'association GUTENBERG et aux concepteurs des sources CTAN (Comprehensive T<sub>E</sub>XArchive Network) (etc...), pour le merveilleux outil qu'est L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Un grand merci aux acteurs du projet GNU, pour leurs excellents freewares, et mes encouragements pour leur remarquable projet. Un grand bravo aux concepteurs d'Adobe Illustrator 8.0, et de Maple 5.4. Et merci à Stuart Spector pour ses basses géniales.

Je tiens à remercier Steve Boyer, Brian Bowditch, Daryl Cooper, Michel Domergue, John Hubbard, Lê Dũng Tráng, Jérôme Los, Martin Lustig, Daniel Matignon, Frédéric Paulin, Zlil Sela, et Bert Wiest, d'avoir répondu à mes questions, qui n'étaient peut-être pas toujours clairement posées.

Je tiens particulièrement à remercier Martin Bridson et Gilbert Levitt, d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, et d'avoir investi du temps dans mon travail. Je me sens particulièrement honoré de pouvoir compter des rapporteurs aussi prestigieux. Qu'ils soient assurés de ma reconnaissance, et de mon admiration envers leurs talents de mathématiciens. J'en profite pour remercier une fois de plus Gilbert Levitt, pour les nombreux commentaires qu'il m'a communiqué, et toutes les erreurs qu'il m'a signalé.

Je tiens à remercier Martin Lustig et Jérôme Los, non seulement d'avoir accepté d'être examinateur de ma thèse, mais aussi de tous ces agréables moments que nous avons passé devant un tableau noir, ou un café. La grande sympathie que j'éprouve à leur égard n'éclipse en rien tout le respect que j'ai envers leurs travaux et leurs compétences.

Je tiens à remercier Pierre De la Harpe d'avoir accepté d'être membre de mon jury. C'est pour moi un grand honneur.

Enfin je tiens non pas seulement à remercier, mais à assurer de ma profonde gratitude, celui sans qui ces pages seraient restées blanches, mon Maître, Hamish Short. Il m'a tout appris de ce domaine superbe des mathématiques, au carrefour de la théorie des groupes, de la géométrie, et de la topologie de petite dimension, et m'a pleinement donné les moyens de m'y perfectionner. Cotoyer régulièrement une personne si chaleureuse, douée d'une telle érudition et d'une telle vivacité a constitué pour moi une expérience particulièrement enrichissante. Sa confiance, son attention, sa disponibilité, son aide avisée, ont constitué le meilleur soutien dont on puisse espérer. Aujourd'hui, à l'achèvement de ce travail, ma plus grande satisfaction est d'avoir rempli ce contrat de confiance passé entre lui et moi.

Décembre 2001.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Réduction du problème</b>	<b>17</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	17
1.2 Décomposition topologique d'une 3-variété . . . . .	21
1.3 Conjecture de géométrisation de Thurston . . . . .	22
1.4 Les problèmes de Dehn . . . . .	24
1.5 Réduction du problème de la conjugaison . . . . .	28
<b>2 Le groupe d'une variété Haken fermée</b>	<b>30</b>
2.1 Décomposition JSJ d'une variété Haken . . . . .	30
2.1.1 Théorème Jaco-Shalen-Johannson . . . . .	30
2.1.2 Décomposition d'une 3-variété en pièces élémentaires . . . . .	31
2.1.3 Minimalité de la décomposition . . . . .	32
2.2 Groupe fondamental d'une variété Haken . . . . .	34
2.2.1 Produits amalgamés et extensions HNN . . . . .	34
2.2.2 Graphe de groupe . . . . .	37
2.2.3 Groupe fondamental d'une variété Haken . . . . .	41
<b>3 Extension HNN, amalgame, et graphe de groupe</b>	<b>48</b>
3.1 Extension HNN et amalgame . . . . .	48
3.1.1 Produit amalgamé . . . . .	48
3.1.2 Extension HNN . . . . .	50
3.2 Graphes de groupe . . . . .	52
3.2.1 Trajets et circuits . . . . .	53
3.2.2 Théorème de commutativité . . . . .	59
3.2.3 Théorème de conjugaison . . . . .	60
3.2.4 Problème de la conjugaison et double d'un groupe . . . . .	64
3.2.5 Propriétés algébriques d'un graphe de groupe sans circuit . . . . .	65
3.3 Démonstrations des théorèmes 3.1.3 et 3.1.4 . . . . .	68
<b>4 Algorithmes dans le cas hyperbolique</b>	<b>74</b>
4.1 Convergence géométrique . . . . .	74
4.1.1 Définition de la topologie géométrique . . . . .	75
4.1.2 Caractérisation géométrique . . . . .	77



4.1.3	Interprétation topologique de la convergence . . . . .	78
4.1.4	Convergence de représentation . . . . .	79
4.1.5	Théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston . . . . .	81
4.2	Algorithmes dans un groupe $\delta$ -hyperbolique . . . . .	84
4.2.1	Définition d'un groupe hyperbolique au sens de Gromov . . . . .	84
4.2.2	Premières propriétés . . . . .	88
4.2.3	Les algorithmes . . . . .	89
4.3	Algorithmes dans le cas hyperbolique de volume fini . . . . .	99
4.3.1	Comportement algébrique asymptotique . . . . .	99
4.3.2	Vérifier l'hyperbolicité . . . . .	105
4.3.3	Algorithmes pour des variétés hyperboliques de volume fini . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Le cas des fibrés de Seifert</b>	<b>115</b>
5.1	Définition et propriétés topologiques . . . . .	116
5.2	Le groupe d'un fibré de Seifert . . . . .	119
5.3	Groupes Fuchsien . . . . .	123
5.4	Certaines propriétés algébriques . . . . .	127
5.5	Solution au problème de la conjugaison . . . . .	130
5.6	Derniers algorithmes . . . . .	165
<b>6</b>	<b>Circuits et groupe d'une variété Haken</b>	<b>168</b>
6.1	Graphe de groupe presque sans circuit . . . . .	168
6.1.1	Définitions . . . . .	168
6.1.2	Propriétés algébriques . . . . .	171
6.2	Le groupe d'une variété Haken fermée . . . . .	178
6.2.1	Circuits et trajets pour une variété Haken . . . . .	178
6.2.2	Propriété algébrique . . . . .	181
<b>7</b>	<b>Solution au problème de la conjugaison</b>	<b>182</b>
7.1	Le cas de la géométrie Sol . . . . .	182
7.2	Le cas Haken, non fibré en tores sur le cercle . . . . .	191
7.2.1	Procédures de réduction de mots . . . . .	191
7.2.2	L'algorithme de la conjugaison . . . . .	195
	<b>Bibliographie</b>	<b>205</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>209</b>
	<b>Index</b>	<b>213</b>

# Introduction

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne le connusse évidemment être telle [...].

« Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

« Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés jusqu'à la connaissance des plus composés [...].

« Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.»

R.DESCARTE, *Discours de la méthode*.

La théorie des groupes, née autour des travaux d'E.Galois sur la résolution des équations algébriques (1832), ne traite à ses débuts que des groupes finis. C'est principalement l'influence de F.Klein avec le programme d'Erlangen (1872), et dans le même temps le développement des groupes continus initié par S.Lie, qui mettent en évidence l'intérêt que revêtent les groupes infinis en géométrie.

Au début des années 1880, H.Poincaré, tout d'abord seul puis en collaboration avec F.Klein, utilise de façon remarquable, les groupes auxquels il donne le nom de Fuchsien et Kleinien, pour résoudre le difficile problème de l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Ses travaux sont parmi les premiers, dans lesquels le concept de groupe infini «discontinu» (par opposition aux groupes continus de Lie ; on dirait aujourd'hui plutôt «discret») prend une telle importance. En outre, pour la première fois, il fait une utilisation fructueuse de la géométrie hyperbolique, la sortant du statut qu'elle avait alors, de curiosité ayant un intérêt d'ordre plus philosophique que mathématique.

Apparaît alors la nécessité de se donner un groupe discontinu, abstraitement, par une présentation (c'est à dire des générateurs et des relations). La théorie qui étudie les groupes par la donnée de présentation est dénommée théorie combinatoire des groupes. Elle est initiée par W.Dyck qui fournit une présentation pour un groupe Fuchsien quelconque (1882). Mais c'est la topologie, avec l'apparition du groupe fondamental<sup>1</sup>, qui stimulera son développement en une théorie indépendante.

---

1. ou premier groupe d'homotopie ; introduit en 1892 par H.Poincaré pour montrer l'existence d'une 3-sphère d'homologie qui n'est pas une 3-sphère.

Dans ce domaine, l'influence quelques années plus tard de M. Dehn sera prépondérante. Son objectif est l'étude des variétés topologiques de dimensions 2 et 3. Il traduit les problèmes de topologie auxquels il est confronté, en des problèmes de théorie des groupes, par le biais du groupe fondamental, montrant ainsi l'importance que revêt cette notion en topologie de petite dimension. Il poursuit l'étude de H. Poincaré et met en place tout le matériel de théorie combinatoire des groupes et de topologie de petite dimension, qui conditionnera la plupart des développements ultérieurs du XX<sup>ème</sup> siècle<sup>2</sup>. Il met surtout en évidence le caractère fondamental en théorie combinatoire des groupes de trois problèmes qui ont depuis pris l'appellation de problèmes de Dehn. Ces problèmes sont les suivants :

Problème du mot : Etablir pour un groupe  $G$  quelconque donné par une présentation, un algorithme permettant de décider pour tout mot  $\omega$  sur les générateurs, si  $\omega$  représente l'élément neutre de  $G$ . La résolution de ce problème équivaut à la constructibilité du graphe de Cayley de  $G$ . Si en outre  $G = \pi_1(M)$ , le problème est identique à celui consistant à décider pour tout lacet arbitraire  $l$  de  $M$ , si  $l$  est contractile dans  $M$  ; ce qui équivaut à la constructibilité du revêtement universel de  $M$ .

Problème de conjugaison : Sous les mêmes hypothèses, établir un algorithme permettant de décider pour tout couple de mots arbitraires, s'ils représentent des éléments conjugués de  $G$ . Ce problème est plus technique et difficile que le problème du mot, qui n'apparaît alors que comme le cas particulier ou l'un des éléments considérés représente l'élément neutre de  $G$ . Lorsque  $G = \pi_1(M)$ , ce problème revient à décider si deux lacets arbitraires sont librement homotopes dans  $M$ . Une solution dans un groupe de surface permet, par exemple, de décider si deux courbes fermées sur cette même surface sont isotopes.

Problème de l'isomorphisme : Etablir un algorithme qui permette de décider pour tout couple de présentations, si elles présentent des groupes isomorphes. Puisque le groupe fondamental est un invariant topologique, le problème de l'isomorphisme est intimement lié au problème de l'homéomorphisme pour les variétés.

Ces problèmes sont devenus d'autant plus célèbres, qu'en 1955, P. Novikov et indépendamment W. Boone démontrent qu'il existe un groupe  $G$  et une présentation finie de  $G$  pour lesquels le problème du mot est insoluble ; c'est à dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si un mot arbitraire représente l'élément neutre. Ainsi le problème du mot est en général insoluble. En corollaire, puisqu'un algorithme qui résout le problème de conjugaison résout aussi le problème du mot (pour décider si  $\omega = 1$  il suffit de décider si  $\omega \sim 1$ ), le problème de conjugaison est lui aussi en général insoluble. L'indépendance logique des problèmes du mot et de la conjugaison sera montrée par la suite, avec l'existence d'un groupe admettant un algorithme qui résout le problème du mot, et ayant un problème de conjugaison insoluble (cf. [Mi2]).

---

2. Rien que dans notre travail, le nom de Dehn apparaît pour quatre notions différentes : les problèmes de Dehn, l'algorithme de Dehn (qui fonde la théorie des groupes  $\delta$ -hyperboliques de Gromov), le lemme de Dehn (point de départ de la machinerie des surfaces incompressibles en dimension 3), et la technique d'obturations de Dehn (qui depuis le célèbre théorème de Lickorish est centrale en topologie de dimension 3).

Quant au problème de l'isomorphisme, S.Adjan et M.Rabin ont montré que même dans des cas très simples, ce problème est insoluble (1958). Hors de notre propos, et admettant trop rarement une solution, nous n'aborderons plus ce problème dans la suite et nous concentrerons davantage sur les problèmes du mot et de la conjugaison. Remarquons que ces derniers problèmes dépendent *a priori* d'une présentation du groupe  $G$  considéré. Il est aisé de vérifier que l'existence d'une solution — *i.e.* l'algorithme recherché — elle, n'en dépend pas. Ainsi avoir une solution à l'un de ces problèmes est une propriété du groupe  $G$ .

On sait facilement résoudre ces problèmes dans des cas très simples : les groupes finis, libres, abéliens, ou obtenus par produit direct, ou par produit libre à partir de tels groupes. Une part importante des travaux en théorie des groupes s'est dévouée à la recherche de classes de groupes admettant une solution à ces problèmes. Citons en particulier les groupes hyperboliques de M.Gromov (que nous utiliserons dans le chapitre 4), les groupes automatiques de D.Epstein *et al.*, et les groupes  $CAT(0)$  de M.Bridson et A.Haefliger. Tous ont en commun une inspiration des travaux de M.Dehn dans le cas des groupes de surface de genre  $g > 1$ , qu'il généralisent, et présentent des algorithmes efficaces, du moins pour le problème du mot. Seulement de nombreux groupes de grand intérêt échappent à ces classes, qui bien qu'importantes apparaissent parfois trop restreintes.

Revenons-en au cadre initial de ces problèmes, et interrogeons-nous sur le statut des problèmes du mot et de la conjugaison dans le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  d'une variété connexe compacte, de dimension  $n$ .

- M.Dehn a résolu le cas  $n = 2$  où  $M$  est une surface (cf. [De1], [De2], [De3]). Il montre l'existence d'un procédé de réduction monotone d'un mot, appelé depuis algorithme de Dehn, qui résout le problème du mot, et il résout de façon analogue le problème de conjugaison. Il utilise pour cela un argument utilisant la structure hyperbolique d'une surface de genre  $> 1$ , qu'il simplifiera plus tard en un argument topologique. Dans une terminologie plus moderne, le groupe d'une telle surface est un groupe hyperbolique au sens de Gromov.

- Tout groupe finiment présenté est le groupe fondamental d'une variété compacte de dimension arbitraire  $\geq 4$ . Ainsi, avec le résultat de P.Novikov et W.Boone, les problèmes du mot et de la conjugaison sont en général insolubles dans le groupe d'une variété de dimension  $\geq 4$ .

- Dans le cas d'une variété de dimension 3, la première avancée significative est due à F.Waldhausen qui résout le problème du mot dans le groupe d'une variété «suffisamment grande» (cf. [Wa2]). Sa méthode, cependant, n'éclaire en rien sur la marche à suivre pour résoudre le problème de conjugaison. Plus récemment, les travaux d'Epstein et Thurston (cf. [CEHLPT]) établissent que le problème du mot est résoluble si l'on suppose que la variété considérée vérifie la conjecture de géométrisation de Thurston (cf. §1.3). D.Epstein et W.Thurston ont montré que sous cette hypothèse, dans presque tous les cas son groupe fondamental est automatique et admet donc une solution au problème du mot ; les cas restants se traitant très aisément par ailleurs. Cela ne garantit cependant pas une solution au problème de conjugaison (rappelons que l'on ne sait pas résoudre ce problème pour les groupes automatiques), que l'on ne sait résoudre que dans certains cas particuliers :

- ✓ – Les noeuds et entrelacs alternés. Ils ont des groupes à petites simplifications (Weinbaum 1971, Appel et Schupp 1972, cf. [LS]).
- ✓ – Les variétés hyperboliques de volume fini. Leur groupe est biautomatique (cf. [CEHLPT]).
- ✓ – Certains espaces fibrés de Seifert ont un groupe biautomatique (cf. [CEHLPT]).
- ✓ – Les noeuds. C'est un résultat de Z.Sela (cf. [Sel]) dont nous nous inspirerons dans ce travail.
- ✓ – Les variétés irréductibles à bord non vide. Elles admettent une métrique riemannienne de courbure non positive, et leur groupe est donc  $CAT(0)$ . De nombreuses autres 3-variétés sont susceptibles d'admettre une telle métrique, mais la démonstration en est très difficile, et ce n'est certainement pas le cas de toute 3-variété.

Le but essentiel de notre travail est la démonstration du résultat qui suit. Pour ce faire nous allons construire un algorithme, en nous inspirant dans le cas le plus délicat à considérer, du groupe d'une variété haken, de la stratégie appliquée par Z.Sela dans le cas du complément d'un noeud.

**Théorème principal** *Le groupe fondamental d'une 3-variété orientable vérifiant la conjecture de géométrisation de Thurston, a un problème de la conjugaison résoluble.*

La première étape dans la démonstration de ce résultat, consiste à la réduire au cas de variétés vérifiant des hypothèses plus fortes (c'est l'objet du paragraphe §1.5). Considérons une 3-variété  $M$  (connexe, compacte) orientable, vérifiant la conjecture de Thurston. Si  $M$  est à bord non vide, on obtient la variété  $2M$  en «doubler»  $M$  le long de son bord. Le groupe  $\pi_1(M)$  se plonge naturellement dans  $\pi_1(2M)$ , et l'on peut montrer que si  $u, v \in \pi_1(M)$ , alors  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$  si et seulement si ils le sont dans  $\pi_1(2M)$  (cf. proposition 3.2.3). Ainsi, une solution au problème de la conjugaison dans  $\pi_1(2M)$  fournit une solution dans  $\pi_1(M)$ . Pour cette raison, on pourra supposer que la variété  $M$  est fermée. Avec le théorème de Kneser-Milnor,  $M$  se décompose en sommes connexes de 3-variétés fermées, qui sont soit irréductibles, soit homéomorphes à  $S^1 \times S^2$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  se décompose comme produit libre des groupes des 3-variétés obtenues. Par stabilité du problème de la conjugaison par produit libre, et puisque  $\pi_1(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$  admet une solution au problème de conjugaison, on pourra supposer que  $M$  est fermée irréductible.

Avec la classification des 3-variétés fermées vérifiant la conjecture de Thurston (cf. §1.3), et les résultats connus sur le problème de la conjugaison dans le groupe d'une 3-variété (cf. [CEHLPT]), la démonstration du théorème principal se réduit à une démonstration des trois résultats suivants :

**Théorème A** *Le groupe fondamental d'une 3-variété orientable, admettant une fibration de Seifert, a un problème de la conjugaison résoluble.*

**Théorème B** *Le groupe fondamental d'une 3-variété fermée orientable, modelée sur la géométrie Sol, a un problème de la conjugaison résoluble*

**Théorème C** *Le groupe fondamental d'une 3-variété fermée orientable, Haken,*

qui n'est pas un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ , a un problème de la conjugaison résoluble.

Pour résoudre le théorème A, nous utiliserons le fait célèbre que le groupe  $\pi_1(M)$  d'un fibré de Seifert, contient un sous-groupe normal cyclique  $N$ , et que le quotient  $\pi_1(M)/N$  est un groupe Fuchsien. Nous réduirons alors le problème de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$ , à des problèmes de décision dans le groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ .

Le théorème B se résout sans difficulté en décomposant le groupe fondamental, en extension HNN de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , ou en amalgame de deux copies du groupe de la bouteille de Klein.

La démonstration du théorème A, fait l'objet de la section 5.5, et celle du théorème B, de la section 7.1. Tout le reste de notre travail a essentiellement pour but la démonstration du théorème C, qui constitue le cas le plus difficile. Nous emploierons la stratégie utilisée par Z.Sela dans le cas d'un noeud (cf. [Sel]).

Soit  $M$  une 3-variété Haken fermée. Avec le théorème de Jaco-Shalen-Johannson,  $M$  contient un système  $W$ , unique à isotopie près, de tores essentiels, et si l'on décompose  $M$  le long de  $W$ , les variétés obtenues — ou *pièces élémentaires* — admettent une fibration de Seifert, ou une structure hyperbolique complète de volume fini. Si l'on suppose en outre que  $M$  n'est pas fibré en tores sur le cercle, aucune des pièces obtenues n'est homéomorphe à  $S^1 \times S^1 \times I$  (c'est pour cette raison que nous traiterons à part le cas d'un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ ). Notons  $M_1, M_2, \dots, M_q$  les pièces élémentaires de la décomposition de  $M$ . Nous appelons *sous-groupe périphéral*, tout groupe libre abélien de rang 2 de  $\pi_1(M_i)$ , provenant du plongement d'une composante de  $\partial M_i$ . Nous souhaitons réduire l'algorithme de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$  à l'algorithme du mot de  $\pi_1(M)$  (qui est résoluble, cf. théorème 1.4.5), et à des algorithmes — que nous appellerons *algorithmes élémentaires* — dans les groupes fondamentaux  $\pi_1(M_i)$  des pièces élémentaires, pour  $i$  variant de 1 à  $q$ . Ces algorithmes sont les suivants :

**Algorithme de la conjugaison** dans  $\pi_1(M_i)$ .

**Algorithme de détermination périphérale :** Donné  $T$  un sous-groupe périphéral de  $\pi_1(M_i)$ , décider pour tout élément arbitraire  $u \in \pi_1(M_i)$ , si  $u \in T$ .

**Algorithme des classes périphérales :** Donné  $T$  un sous-groupe périphéral de  $\pi_1(M_i)$ , décider pour tout élément arbitraire  $u \in \pi_1(M_i)$ , si  $u$  est conjugué dans  $\pi_1(M_i)$  à un élément de  $T$ .

**Algorithme des 2-cosets I :** Donné  $T$  un sous-groupe périphéral de  $\pi_1(M_i)$ , décider pour tout couple d'éléments arbitraires  $u, v \in \pi_1(M_i) - T$ , si il existe  $c_1, c_2 \in T$  tel que  $u = c_1.v.c_2$  dans  $\pi_1(M_i)$ .

**Algorithme des 2-cosets II :** Donnés  $T_1, T_2$  deux sous-groupes périphéraux de  $\pi_1(M_i)$ , décider pour tout couple d'éléments arbitraires  $u, v \in \pi_1(M_i)$ , si il existe  $c_1 \in T_1, c_2 \in T_2$ , tel que  $u = c_1.v.c_2$  dans  $\pi_1(M_i)$ .

Pour ce faire, nous devons d'abord étudier la structure du groupe  $\pi_1(M)$ . La décomposition JSJ de  $M$ , fournit une décomposition de  $\pi_1(M)$ , en groupe fondamental d'un graphe de groupe, dont les groupes de sommet sont les groupes fondamentaux des pièces élémentaires, et les groupes d'arête, des groupes libres abéliens

de rang 2. Nous étudions en détail les éléments conjugués, et le centralisateur d'un élément dans le groupe fondamental d'un graphe de groupe. Nous en déduisons des théorèmes généraux (théorèmes 3.2.1, 3.2.2), généralisant ceux existant, pour un produit amalgamé (cf. théorèmes 3.1.1, et 3.1.2). Ce sont alors des propriétés topologiques des pièces élémentaires — la caractérisation des anneaux essentiels, cf. propositions 4.3.1 et 5.4.2 —, ainsi que de la décomposition — minimalité et recollement de Seifert, cf. proposition 2.1.2 — qui nous permettront de réduire l'algorithme de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$ , aux algorithmes élémentaires dans les pièces de la décomposition et à l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$  (cf. chap. 7).

Nous résolvons dans le chapitre 4 les algorithmes élémentaires dans le groupe d'une variété  $M$ , hyperbolique de volume fini (remarquons que la théorie des groupes automatiques résout le problème de conjugaison dans un tel groupe, cf. [CEHLPT]). La stratégie consiste à chercher deux variétés hyperboliques fermées  $M_1, M_2$ , obtenues par obturations de Dehn sur  $M$ , et à réduire les algorithmes élémentaires dans  $\pi_1(M)$ , à des algorithmes analogues dans  $\pi_1(M_1), \pi_1(M_2)$ . Les groupes de  $M_1$  et  $M_2$  étant hyperboliques dans le sens de Gromov, nous utiliserons cette théorie pour résoudre les algorithmes obtenus dans  $\pi_1(M_1)$  et  $\pi_1(M_2)$ . Seulement, pour procéder à cette réduction, il est nécessaire que  $\pi_1(M_1)$  et  $\pi_1(M_2)$  vérifient certaines propriétés. Plus précisément, pour tout couple de sous-groupes périphéraux  $T_1, T_2$  de  $\pi_1(M)$ , si  $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M_1)$  désigne la surjection canonique, on désire avoir, que :

- $\rho(T_1), \rho(T_2)$  sont des sous-groupes cycliques infinis maximaux de  $\pi_1(M_1)$ ,
- si  $u$  conjugue deux éléments de  $\rho(T_1)$ , alors  $u \in \rho(T_1)$ ,
- un élément non trivial de  $\rho(T_1)$  n'est pas conjugué dans  $\pi_1(M_1)$  à un élément de  $\rho(T_2)$ .

Et de même pour  $M_2$ . Pour montrer l'existence de telles «bonnes» variétés, nous aurons besoin de rentrer plus profondément dans les détails du théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston, et de la topologie géométrique.

Quant aux algorithmes élémentaires dans un fibré de Seifert, nous les résoudrons dans le chapitre 5, en utilisant l'interprétation algébrique de la structure de  $S^1$ -fibré sur une orbiété, *i.e.*, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N \longrightarrow 1$$

et le groupe quotient  $\pi_1(M)/N$  est Fuchsien. Nous réduirons les algorithmes de  $\pi_1(M)$  à des algorithmes analogues dans le groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ . Ce dernier est soit un produit libre de groupes cycliques, soit virtuellement un groupe de surface fermée, et admet des solutions à ces algorithmes. A l'exception du problème de la conjugaison, un peu plus délicat, la résolution s'effectue sans difficulté.

## Plan de la thèse :

Les chapitres 1, 2, et 3 ne sont essentiellement constitués que de rappels des notions que nous serons amenés à employer, et pourront ne présenter d'autre intérêt au lecteur averti, que celui de fixer les conventions d'écriture.

**Chapitre 1 :** Ce chapitre a pour fonctions, d'une part de fixer les notations (§1.1) et d'introduire le problème (§1.2, 1.3, et 1.4), et d'autre part de justifier de la réduction

du théorème principal aux théorèmes A, B, et C (§1.5).

**Chapitre 2 :** Nous énonçons le théorème de décomposition Jaco-Shalen-Johannson pour les variétés Haken fermées (théorème 2.1.1). Nous rappelons deux propriétés d'une décomposition minimale (propositions 2.1.1 et 2.1.2), qui sont essentielles à notre travail, et seront utilisées dans les chapitres 6 et 7. Nous rappelons la notion de graphe de groupe, et comment la décomposition JSJ de la variété  $M$  procure une décomposition de  $\pi_1(M)$  en groupe fondamental de graphe de groupes. Cette décomposition sera largement utilisée dans la suite pour étudier le groupe  $\pi_1(M)$ .

**Chapitre 3 :** Ce chapitre constitue la clef de voûte de notre travail. Son but est de généraliser les théorèmes existants sur les éléments conjugués et les éléments qui commutent dans un amalgame ou une extension HNN, au cas du groupe d'un graphe de groupe. Pour cela nous définissons les notions de cycles et de trajets, qui apparaissent naturellement dès lors que l'on s'intéresse à ces problèmes, et qui vont nous permettre d'énoncer des résultats concis (théorème de conjugaison, 3.2.2, et théorème de commutativité, 3.2.1). Nous montrons aussi, le fait déjà utilisé dans le paragraphe 1.5, que le problème de la conjugaison dans le groupe  $G$  se réduit au même problème dans son double  $2G$  (proposition 3.2.3).

**Chapitre 4 :** Nous résolvons dans ce chapitre les algorithmes élémentaires dans le groupe d'une variété  $M$  hyperbolique de volume fini (cf. propositions 4.3.9, 4.3.10, 4.3.11). L'idée est de trouver deux «bons» quotients de  $\pi_1(M)$ , qui soient hyperboliques au sens de Gromov, et de réduire ces algorithmes, à des algorithmes dans ces quotients. Pour prouver l'existence de tels quotients, nous avons besoin d'utiliser l'existence d'une suite de variété hyperboliques fermées convergeant vers  $M$  au sens de la topologie géométrique, donnée par le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston.

**Chapitre 5 :** Nous résolvons dans ce chapitre les algorithmes élémentaires dans le cas du groupe d'un fibré de Seifert  $M$ . Pour cela nous les réduisons au groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ . Lorsque  $M$  est à bord non vide,  $\pi_1(M)/N$  est un produit libre de groupe cyclique, ce qui fournit aisément une solution aux algorithmes élémentaires de détermination des 2-cosets, et des classes périphérales (propositions 5.6.3, 5.6.4, 5.6.2). Le problème de la conjugaison (théorème A), est quant à lui plus délicat à traiter, car la variété  $M$  peut-être fermée. Dans ce dernier cas,  $\pi_1(M)/N$  est virtuellement un groupe de surface fermée. Nous réduisons le problème de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$  au problème de la conjugaison dans  $\pi_1(M)/N$ , et à un algorithme qui fournirait le centralisateur d'un élément arbitraire de  $\pi_1(M)/N$  (proposition 5.5.1), que nous établissons.

**chapitre 6 :** L'objectif principal de ce chapitre, est de montrer qu'il existe très peu de trajets et de cycles dans le graphe de groupe d'une variété Haken  $M$ . Ainsi le problème consistant à décider s'il existe un trajet reliant deux éléments de  $\pi_1(M)$  — qui sera nécessaire à une résolution du problème de la conjugaison dans le chapitre



7 — se réduit aux algorithmes de détermination des classes périphérales dans les pièces élémentaires. Nous formalisons aussi la notion de graphe de groupe presque sans cycle, qui généralise la notion de graphe de groupe sans cycle, apparue au chapitre 3. Cette notion permet de redémontrer, tout en le généralisant à cette première classe, le théorème caractérisant les centralisateurs dans le groupe d'une variété Haken, dû à P. Shalen (cf. [JS]). Ce résultat sera utile, pour établir une procédure de re-écriture de mots dans  $\pi_1(M)$  qui nous sera nécessaire dans le dernier chapitre.

**Chapitre 7 :** Nous donnons l'algorithme principal de la conjugaison, c'est à dire celui qui traite du cas d'une variété Haken fermée. Nous traitons d'abord le cas d'un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$  (théorème B ou théorème 7.1.2). Il se résout aisément en utilisant la décomposition de  $\pi_1(M)$  en produit semi-direct  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ , ou en amalgame de deux copies du groupe de la bouteille de Klein,  $\pi_1(\mathbb{KB}_2)$ . Le reste du chapitre est ensuite dévoué au cas d'une 3-variété Haken fermée qui n'est pas fibrée en tores sur le cercle (théorème C ou théorème 7.2.1). C'est là (§7.2 et 7.3), que nous montrerons comment les algorithmes élémentaires, et l'algorithme du mot de  $\pi_1(M)$ , permettent de résoudre le problème de la conjugaison.

# Chapitre 1

## Réduction du problème

Dans la première section de ce chapitre, nous fixons les notations générales, ainsi que le vocabulaire élémentaire de topologie de dimension 3. Dans les sections 1.2, 1.3, et 1.4, nous exposons le cadre de notre travail. La section 1.2 traite de la décomposition topologique d'une 3-variété, la section 1.3 de la conjecture de géométrisation de Thurston, et la section 1.4 des problèmes de Dehn.

La dernière section, a pour objet de justifier de la réduction du problème de la conjugaison dans le groupe d'une 3-variété vérifiant la conjecture de Thurston, aux cas d'une 3-variété fermée, admettant une fibration de Seifert, ou modelée sur Sol, ou Haken non fibrée en tores sur le cercle. Pour cela nous admettrons un résultat qui ne sera démontré que dans la section 3.2 (proposition 3.2.3).

### 1.1 Préliminaires

Le lecteur sera supposé être familiarisé avec la théorie des groupes, la topologie algébrique, la topologie des variétés de dimensions 2 et 3, et la géométrie hyperbolique. Nous emploierons essentiellement les notations usuelles.

Dans une démonstration, le symbole ■ désignera la fin de la démonstration. Lorsqu'une démonstration sera scindée en plusieurs cas indépendants, Le symbole □ pourra désigner la fin du traitement de l'un des cas.

**Théorie des ensembles.** L'ensemble vide est désigné par  $\emptyset$ , l'appartenance par  $\in$ , l'inclusion par  $\subset$ , et l'inclusion stricte par  $\subsetneq$ . Si  $X$  est un ensemble, et  $A \subset X$ ,  $B \subset X$ , nous noterons  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  respectivement la réunion, et l'intersection de  $A$  et  $B$ . Le complémentaire de  $A$  dans  $X$  sera désigné par  $X - A$ . Si  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ , alors  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  désigne le sous-ensemble de  $X$  ayant pour éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; tandis que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  désigne le  $n$ -uplet, ou suite finie de  $X$ , que l'on pourra aussi noter  $(x_j)_{j=1, \dots, n}$ . Une suite (infinie) de  $X$  est notée  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Le produit cartésien de  $A$  et  $B$  est désigné par  $A \times B$ , et le cardinal de l'ensemble  $A$ , par  $\text{card}(A)$ .

Si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application, et  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$ ,  $f(A) \subset Y$  désigne l'image directe de  $A$  par  $f$ , et  $f^{-1}(B) \subset X$  désigne l'image réciproque de  $B$  par  $f$ . L'identité de  $X$  dans  $X$  est désigné par  $\text{Id}_X$  ou  $\text{Id}$ . Si  $f$  est bijective, on notera  $f^{-1} : Y \longrightarrow X$  l'application vérifiant  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ ,  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$ . Si  $X \subset Y$ , l'inclusion de  $X$  dans

$Y$  pourra être notée  $i : X \hookrightarrow Y$ .

**Notions générales.** Nous notons  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{C}$ , respectivement l'ensemble des entiers, des entiers relatifs, des rationnels, des réels, et des nombres complexes. Nous les supposons munis de leurs structures habituelles. Nous notons  $I = [0,1]$ , l'intervalle.

Si  $K$  est un anneau,  $GL(n,K)$ ,  $SL(n,K)$ ,  $PSL(n,K)$  désignent respectivement le groupe général, spécial, et projectif spécial, linéaire de degré  $n$ , sur l'anneau  $K$ .

**Théorie des groupes.** Dans un groupe abstrait  $G$ , nous utiliserons en général les notations multiplicatives, *i.e.*, si  $g, h \in G$ , alors  $g.h$  ou  $gh$  désigne le produit de  $g$  et  $h$ ,  $g^{-1}$  l'inverse de  $g$ , et  $1$  l'élément neutre. Dans un groupe abélien nous utiliserons plutôt les notations usuelles, additives, provenant du théorème de classification des groupes abéliens de type fini (cf. [Ro]).

Le groupe trivial est désigné par  $\{1\}$ , le groupe cyclique infini par  $\mathbb{Z}$ , et le groupe cyclique d'ordre  $n$  par  $\mathbb{Z}_n$ .

Si  $X$  est un ensemble fini,  $F(X)$  est le groupe libre engendré par  $X$ . On notera  $H < G$  ou  $H \subset G$ , si  $H$  est un sous-groupe du groupe  $G$ . Si  $H$  est un sous-groupe distingué (ou normal) de  $G$ , nous noterons  $H \triangleleft G$ . Si  $X$  est un sous-ensemble de  $G$ , nous noterons  $\langle X \rangle_G$  ou  $\langle X \rangle$ , le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $X$  (ou sous-groupe engendré par  $X$ ), et  $\text{gp}(X)$  le plus petit sous-groupe normal de  $G$  contenant  $X$ . Deux éléments  $g, h \in G$  sont conjugués dans  $G$ , s'il existe  $u \in G$ , tel que  $g = uhu^{-1}$ , et l'on note  $g \sim h$ ; c'est une relation d'équivalence sur  $G$ , les classes d'équivalence, sont appelées classes de conjugaison. Si  $g, h$  sont deux éléments d'un groupe  $G$ , leur commutateur est donné par  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Le sous-groupe commutateur, est le sous-groupe de  $G$  engendré par les éléments  $[g, h]$ ,  $\forall g, h \in G$ , noté  $[G, G]$ . Le centralisateur d'un élément  $g \in G$ , est le sous-groupe défini par  $\mathcal{Z}(g) = \{h \in G \mid [g, h] = 1\}$ . Le centre de  $G$ , est le sous-groupe défini par  $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, [g, h] = 1\}$ .

Le noyau d'un homomorphisme  $\phi$  est noté  $\ker(\phi)$ . Un homomorphisme de groupe est appelé un monomorphisme, épimorphisme, isomorphisme lorsqu'il est, respectivement injectif, surjectif, bijectif. On note  $G \cong H$  si les groupes  $G$  et  $H$  sont isomorphes. Si  $G$  est un groupe,  $\text{Aut}(G)$ ,  $\text{Out}(G)$ ,  $\text{Inn}(G)$  désignent respectivement le groupe des automorphismes, des automorphismes extérieurs, des automorphismes intérieurs de  $G$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux groupes  $A \times B$ ,  $A * B$  désignent respectivement, le produit direct, et le produit libre de  $A$  et  $B$ . Si  $A$  et  $B$  sont abéliens leur produit direct pourra aussi être noté  $A \oplus B$ .

Si  $X$  est un ensemble fini, ou dénombrable,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ , nous considérons un ensemble abstrait, en bijection avec  $X$ , que nous notons  $X^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_i^{-1}\}$ . Un mot sur  $X \cup X^{-1}$ , est une suite finie  $(w_i)_{i=1, \dots, n}$  de  $X \cup X^{-1}$ , que l'on note  $w_1 w_2 \dots w_n$ . Il est dit librement réduit s'il ne contient pas de sous-mot (*i.e.* de sous-suite), de la forme  $xx^{-1}$  ou  $x^{-1}x$ , avec  $x \in X$ . On notera  $()$  le mot vide. Une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  d'un groupe  $G$  est un ensemble fini ou dénombrable  $X$ , et un ensemble fini ou dénombrable  $R$  de mots sur  $X \cup X^{-1}$ , tel que  $G \cong F(X)/\text{gp}(R)$ . Tout groupe dénombrable admet une présentation. Les éléments du groupe seront donnés par des mots sur  $X \cup X^{-1}$ , et lorsque le contexte le per-

mettra, on ne distinguera pas un mot, et l'élément qu'il représente dans le groupe. Lorsque l'on désirera marquer la distinction entre mot et élément du groupe, nous noterons pour deux mots  $\omega, \omega'$ ,  $\omega \equiv \omega'$  pour l'égalité en tant que mot, et  $\omega = \omega'$  pour l'égalité, en tant qu'élément du groupe. Une présentation est dite finie, si  $X$  et  $R$  sont des ensembles finis. Si  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $R = \{r_1, \dots, r_p\}$ , on pourra noter  $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_p \rangle$  au lieu de  $\langle X \mid R \rangle$ .

**Topologie des 3-variétés.** Si  $X$  est un espace topologique, et  $U \subset X$ , alors  $\text{int}(U)$  et  $\text{adh}(U)$  désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de  $U$ . Une **variété de dimension  $n$** , est un espace topologique Hausdorff, localement homéomorphe à  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ . Si  $M$  est une variété de dimension  $n$ , nous notons  $\text{Int}(M)$ , l'ensemble des points de  $M$  admettant un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\text{Int}(M) = M$ , nous disons que  $M$  est sans bord. Nous notons  $\partial M = M - \text{Int}(M)$ , le bord de  $M$ . C'est une variété de dimension  $n - 1$ , sans bord, compacte si  $M$  est compacte. Une variété compacte et sans bord sera dite fermée.

Soit  $M$  une variété connexe de dimension  $n$ , et  $*$  un point de  $M$ . Un lacet basé en  $*$  est une application continue  $f : I \longrightarrow M$ , vérifiant  $f(0) = f(1) = *$ . La relation d'homotopie de lacets dans  $M$ , relativement à  $\{0, 1\}$ , est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de  $M$  basés en  $*$ . L'ensemble des classes d'équivalence est naturellement muni d'une structure de groupe, que l'on note  $\pi_1(M, *)$ . Il s'avère que la classe d'isomorphisme de  $\pi_1(M, *)$  ne dépend pas du choix du point de base  $*$ . Aussi nous pourrions le noter  $\pi_1(M)$ . Ce groupe est appelé premier groupe d'homotopie de  $M$ , ou plus couramment **groupe fondamental** de  $M$ . Si  $l$  est un lacet, sa classe dans  $\pi_1(M)$  sera notée  $[l]$ . Une application continue  $f : M \longrightarrow N$  entre des variétés connexes, induit un homomorphisme de leur groupe fondamental, que l'on note  $f_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$ . On montre sans difficulté, que si  $f$  est une équivalence d'homotopie (en particulier lorsque  $f$  est un homéomorphisme), alors  $f_*$  est un isomorphisme.

En fait une variété sera vue, plus comme une classe de variétés à homéomorphisme près, que réellement comme une variété. Ainsi, par exemple, nous aurons coutume de dire « $M$  est une sphère», plutôt que « $M$  est homéomorphe à une sphère».

Nous appellerons **surface**, une variété de dimension 2, compacte, et **3-variété**, une variété de dimension 3, connexe, compacte, orientable. Nous travaillons initialement dans la catégorie TOP. Tous les plongements de 1-variété ou de 2-variété dans une 3-variété seront cependant supposés ne pas être des plongements «sauvages». Aussi, avec le théorème de Moise ([Mo]), nous pourrions passer dans les catégories PL et DIFF, et munir les 1,2,3-variétés, les applications, (etc...) de structures PL, ou lisses.

Nous désignerons usuellement par  $S^0, S^1, S^2, S^3$ , les sphères respectivement 0,1,2 et 3-dimensionnelles,  $D^2$  le disque,  $B^3$  la boule 3-dimensionnelle,  $S^1 \times I$  l'anneau,  $S^1 \times S^1$  le tore,  $\mathbb{RP}_2$  le plan projectif réel,  $\mathbb{CP}_1$  la droite projective complexe,  $\mathbb{P}_3$  l'espace projectif réel de dimension 3, et  $\mathbb{KB}_2$  la bouteille de Klein. Si  $F$  est une  $p$ -variété connexe compacte, et  $B$  est une  $q$ -variété connexe compacte, avec  $p + q = 3$ , nous appellerons  $F$ -fibré sur  $B$  (ou  $F$ -fibré), toute 3-variété homéomorphe à l'espace total d'un espace fibré localement trivial, ayant pour fibre  $F$ , et pour base  $B$ .

Nous terminons, en rappelant la terminologie associée à la théorie des surfaces incompressibles.

Une surface  $F$ , plongée dans une 3-variété  $M$ , est **proprement plongée** dans  $M$ , si  $N \cap \partial M = \partial N$ . Une surface  $N$  proprement plongée dans  $M$ ,  $N$  est à **deux faces** dans  $M$  si il existe un plongement  $h : N \times I \longrightarrow M$ , tel que  $h(x, \frac{1}{2}) = x$  pour tout  $x \in N$ ,  $h(\partial N \times I) \subset \partial M$ , et  $h(N \times I)$  est un voisinage de  $N$  dans  $M$ .

Une surface  $F$ , proprement plongée dans une 3-variété  $M$  ou plongée dans  $\partial M$ , est dite **compressible**, si soit :

- (i) Il existe un disque  $D$  plongé dans  $M$ , tel que  $D \cap F = \partial D$ , et  $\partial D$  n'est pas contractile dans  $F$ .
- (ii)  $F$  est une sphère qui borde une boule dans  $M$ .

Si  $F$  n'est pas compressible, on dira que  $F$  est une surface **incompressible** de  $M$ . Remarquons qu'avec cette définition, tout disque proprement plongé dans  $M$  est incompressible.

Le résultat suivant est une application directe du lemme de Dehn (lemme III.8, [Ja]).

**Lemme 1.1.1** *Une surface  $F$ , plongée dans une 3-variété  $M$ , à 2 faces, distincte de  $S^2$  est incompressible si et seulement si  $\ker(i_* : \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(M)) = \{1\}$ .*

Une 3-variété  $M$  est **irréductible** si elle ne contient pas de sphère incompressible. Remarquons qu'avec cette définition, si  $M$  est irréductible, alors soit  $M$  est homéomorphe à  $B^3$ , soit  $\partial M$  ne contient pas de sphère.

Une 3-variété irréductible  $M$ , est  **$\partial$ -irréductible**, si toutes les composantes connexes de  $\partial M$  sont incompressibles.

Une 3-variété  $M$  est **Haken**, si elle est irréductible, et si elle contient une surface proprement plongée, à 2 faces, incompressible. Remarquons que toute 3-variété irréductible à bord non vide est Haken, en effet il suffit de considérer n'importe quel disque proprement plongé.

Ce dernier exemple n'est pas de grand intérêt : un tel disque n'est intéressant que lorsqu'il permet de décomposer non trivialement la variété. Aussi nous introduisons la notion plus fine de surface essentielle.

Une surface  $F$  proprement plongée dans  $M$  est **parallèle au bord**, si il existe un plongement  $\phi$  de  $F \times I$  dans  $M$ , tel que  $\phi(F \times \{0\}) = F$ ,  $\phi(F \times \{1\}) \subset \partial M$ , et  $\partial F \times I \subset \partial M$ .

Une **surface essentielle** dans la 3-variété  $M$ , est une surface proprement plongée dans  $M$ , à deux faces, incompressible, qui n'est pas parallèle au bord. Avec les lemmes 6.6 et 6.7 de [He], toute variété Haken distincte de  $B^3$  contient une surface essentielle. Une 3-variété est dite **atoroïdale**, si elle ne contient pas de tore essentiel.

En remarquant que toute surface  $F$  simplement connexe proprement plongée dans  $M$ , est à deux faces (avec le lemme 2.1 de [He], si  $i_* : H_1(F, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{Z}_2)$  a pour image  $\{0\}$ , alors  $F$  est à deux faces dans  $M$ ), une sphère essentielle est une sphère proprement plongée incompressible, et un disque essentiel, est un disque  $D$  proprement plongé dans  $M$  dont le bord  $\partial D$  n'est pas contractile dans  $\partial M$ .

## 1.2 Décomposition topologique d'une 3-variété

Considérons dans la suite, une 3-variété  $M$  (orientable). Il existe une procédure canonique de décomposition de  $M$  le long de sphères, de disques, et de tores, essentiels. Pour plus de précisions, nous renverrons le lecteur aux ouvrages de référence, [He], [Ja], et [JS].

La première étape consiste à décomposer  $M$  en somme connexe,

$$M = M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_p$$

où les  $M_1, \dots, M_p$  sont des facteurs premiers, non homéomorphes à  $S^3$  (théorème de Kneser-Milnor). La décomposition est unique, et chacun des facteurs  $M_1, \dots, M_p$  est soit irréductible, soit homéomorphe à  $S^1 \times S^2$ . Remarquons que les composantes sphériques de  $M$ , sont en bijection avec les facteurs homéomorphes à  $B^3$ , et qu'à l'exception de ces derniers, aucun facteur ne contient de sphère dans son bord. Le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  se décompose en produit libre des groupes fondamentaux des facteurs de la décomposition :

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * \cdots * \pi_1(M_p)$$

La deuxième étape consiste à décomposer le long de disques essentiels, c'est à dire, pour chacun des facteurs  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , à rendre incompressible son bord, lorsque ce dernier est non vide. Si un des facteurs irréductibles  $M_i$  a un bord non vide, compressible, alors, avec le lemme de Dehn,  $M_i$  contient un disque proprement plongé dont le bord est une courbe essentielle de  $\partial M_i$ , *i.e.* un disque essentiel. On décompose  $M_i$  le long de ce disque. Il est facile de vérifier que les facteurs obtenus sont irréductibles. On répète ce procédé ; à chaque étape le genre du bord diminue, et donc il finira par s'arrêter. On obtient finalement des 3-variétés  $\partial$ -irréductibles,  $M_i^1, \dots, M_i^q$ . Les facteurs obtenus non homéomorphes à  $B^3$ , sont uniquement déterminés à isotopie ambiante de  $M$  près. La famille de disque, n'est, elle, pas uniquement déterminée, même à isotopie près (considérer le cas d'un handlebody).

Le groupe fondamental  $\pi_1(M_i)$  est produit libre des groupes fondamentaux des facteurs,  $\pi_1(M_i^1), \dots, \pi_1(M_i^q)$ , et d'un groupe libre  $F$  (où le rang de  $F$  est égal au nombre de disques non séparants utilisés dans cette décomposition).

$$\pi_1(M_i) = \pi_1(M_i^1) * \pi_1(M_i^2) * \cdots * \pi_1(M_i^q) * F$$

Ainsi  $M$  s'obtient par les opérations de sommes connexes, et d'identifications le long de disques sur des 3-variétés  $\partial$ -irréductibles, ou homéomorphes à  $S^1 \times S^2$ .

La dernière étape consiste à décomposer les variétés obtenues le long de tores essentiels. W.Jaco et P.Shalen (indépendamment K.Johanson), ont montré que pour toute 3-variété  $\partial$ -irréductible, il existe une famille  $W$  finie de tores essentiels de  $M$  (eventuellement vide), telle que chaque composante connexe de la variété obtenue en décomposant  $M$  le long de  $W$ , est soit un fibré de Seifert (cf. chapitre 5), soit atoroidale. De plus, la famille  $W$  est uniquement déterminée à isotopie ambiante de  $M$  près (cf. [JS]). Nous verrons plus en détail dans le chapitre 2, comment se décompose alors le groupe fondamental. Ainsi, en procédant à cette décomposition sur une variété  $\partial$ -irréductible Haken, on obtient finalement des 3-variétés  $\partial$ -irréductible qui sont soit atoroidales, soit des espaces fibrés de Seifert.

## 1.3 Conjecture de géométrisation de Thurston

Nous rappelons dans cette section ce qu'est la conjecture de géométrisation de Thurston. Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur à [Sc].

Nous appellerons géométrie 3-dimensionnelle, que nous noterons  $(X, \text{Isom}(X))$ , la donnée d'une 3-variété lisse sans bord,  $X$ , simplement connexe, qui admet une structure riemannienne complète, homogène, et où  $\text{Isom}(X)$  désigne le groupe d'isométrie de  $X$ .

On dira qu'une 3-variété  $M$  admet une structure géométrique, si son intérieur  $\text{Int}(M)$  admet une structure riemannienne complète localement homogène. Dans ce cas, le revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $\text{Int}(M)$  admet une structure riemannienne naturelle, homogène, et  $(\widetilde{M}, \text{Isom}(\widetilde{M}))$  est une géométrie 3-dimensionnelle. La variété  $\text{Int}(M)$  est isométrique au quotient de  $\widetilde{M}$  par l'action d'un sous-groupe de  $\text{Isom}(\widetilde{M})$ , agissant par isométrie de façon libre et proprement discontinue sur  $\widetilde{M}$ . On dit que la variété  $M$  est modelée sur la géométrie  $(\widetilde{M}, \text{Isom}(\widetilde{M}))$  (ou plus simplement, sur  $\widetilde{M}$ ).

W. Thurston a classifié les géométries 3-dimensionnelles intéressantes (c'est à dire celles pour lesquelles il existe une 3-variété modelée dessus). Elles sont au nombre de huit (c'est le théorème 5.1, de [Sc]).

**Théorème 1.3.1 (Thurston)** *A isométrie près, il existe huit géométries 3-dimensionnelles «intéressantes». Les 3 géométries de courbure constante  $\mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3$ , les deux géométries produits,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ , et les 3 géométries «fibrées non triviales» Nil, Sol, et le revêtement universel de  $SL(2, \mathbb{R})$ .*

Dans le cas d'une 3-variété fermée  $M$ , la géométrie de  $M$  est unique (théorème 5.2, [Sc]).

**Théorème 1.3.2** *Si  $M$  est une 3-variété fermée modelée sur l'une des huit géométries 3-dimensionnelles, alors la géométrie sur laquelle est modelée  $M$  est unique.*

On peut classifier topologiquement les 3-variétés géométriques fermées, qui ne sont pas modelées sur  $\mathbb{H}^3$  (théorème 5.3, [Sc]).

**Théorème 1.3.3** *Soit  $M$  une 3-variété fermée. Alors,*

(i)  *$M$  est modelée sur Sol, si et seulement si  $M$  est finiment revêtue par un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ , dont l'application de recollement est Anosov. Dans ce cas,  $M$  est Haken.*

(ii)  *$M$  est modelée sur  $\mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, \text{Nil}$ , ou sur le revêtement universel de  $SL(2, \mathbb{R})$ , si et seulement si  $M$  est un espace fibré de Seifert. Dans ce cas,  $M$  est un  $S^1$ -fibré ayant pour base une orbifold  $O_2$ , et si  $e$  désigne le nombre d'Euler du fibré, et  $\chi$  la caractéristique d'Euler de la base  $O_2$ , alors la géométrie de  $M$  est caractérisée par  $e$  et  $\chi$ , selon le tableau suivant :*

	$\chi > 0$	$\chi = 0$	$\chi < 0$
$e = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$	$\mathbb{E}^3$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
$e \neq 0$	$\mathbb{S}^3$	Nil	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$

Une 3-variété modelée sur  $\mathbb{H}^3$ , sera appelée 3-variété hyperbolique. Son intérieur  $\text{Int}(M)$  est isométrique à l'espace quotient  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , où  $\Gamma$  agit par isométrie de façon libre et proprement discontinue sur  $\mathbb{H}^3$  (dans ce cas,  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{C})$ ). On dit que  $M$  est de **volume fini**, si l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^3$  admet un domaine fondamental de volume fini. On a une caractérisation topologique partielle des 3-variété hyperboliques, dans le cas Haken. C'est le théorème d'hyperbolisation de Thurston.

**Théorème 1.3.4 (Thurston)** *Soit  $M$  une 3-variété Haken, qui n'est pas le  $I$ -fibré non trivial à base la bouteille de Klein. Alors  $M$  est modelée sur  $\mathbb{H}^3$  si et seulement si  $M$  est atoroidale. Dans ce dernier cas, si de plus  $\chi(M) = 0$ , alors  $M$  est de volume fini.*

Il est facile de vérifier que toute 3-variété n'admet pas de structure géométrique. Par exemple, une 3-variété géométrique est soit irréductible, soit homéomorphe à  $S^1 \times S^2$  ou à  $\mathbb{P}_3 \# \mathbb{P}_3$ . La conjecture de géométrisation de Thurston, affirme qu'après avoir décomposé topologiquement une 3-variété, les facteurs obtenus admettent une structure géométrique.

**Conjecture de géométrisation de Thurston.** Les variété obtenues dans la décomposition topologique d'une 3-variété, admettent une structure géométrique.

Il n'est pas toujours judicieux de mener à bout la procédure de décomposition topologique. Par exemple, un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$  se décompose le long d'un tore essentiel, en un facteur  $S^1 \times S^1 \times I$ . Bien sûr  $S^1 \times S^1 \times I$  admet une structure géométrique (et même plusieurs), mais un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ , est aussi soit un espace fibré de Seifert, soit modelé sur Sol, et admet donc une structure géométrique bien plus «riche». Un cas similaire apparaît pour la variété  $\mathbb{P}_3 \# \mathbb{P}_3$ . Elle peut-être décomposée en somme connexe de  $\mathbb{P}_3$  par lui-même, qui admet une structure géométrique modelée sur  $\mathbb{S}^3$ , ou être munie d'une structure géométrique modelée sur  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Ces cas font figure d'exception.

Tout espace fibré de Seifert (à bord éventuellement non vide), admet une structure géométrique (cf. [Sc]). Ainsi, avec le théorème d'hyperbolisation de Thurston, la conjecture de géométrisation est vérifiée par les variétés Haken. C'est certainement l'avancée la plus significative dans ce sens, et on ne peut-être sûr que d'une chose, il s'agit d'une conjecture très difficile : elle implique en effet la conjecture de Poincaré, qui depuis plus d'un siècle a su tenir tête aux assauts répétés des topologues.

Nous dirons d'une 3-variété qu'elle **vérifie la conjecture de géométrisation de Thurston**, lorsque les facteurs obtenus dans sa décomposition topologique, admettent une structure géométrique. Nous disposons du théorème de classification suivant.

**Proposition 1.3.1** *Une 3-variété irréductible  $M$ , vérifiant l'hypothèse de géométrisation de Thurston, est soit Haken, soit fermée, et munie d'une fibration de Seifert, ou d'une structure hyperbolique de volume fini.*



## 1.4 Les problèmes de Dehn

Max Dehn fut le premier à formuler, en 1910, des problèmes, qui outre le fait d'avoir pris son nom, on acquis entretemps une place fondamentale en théorie combinatoire des groupes (cf. [De1], [De2]).

Considérons un groupe  $G$ , et une présentation finie  $\langle X \mid R \rangle$  de  $G$ . Un élément  $\omega$  de  $G$  sera donné par un mot sur les générateurs.

**Problème du mot** Existe-t-il un algorithme, permettant de déterminer pour tout mot  $\omega$  sur  $X \cup X^{-1}$ , si  $\omega = 1$  dans  $G$  ?

**Problème de la conjugaison** Existe-t-il un algorithme permettant de décider pour tout couple de mots  $\omega, \omega'$  sur  $X \cup X^{-1}$ , si  $\omega \sim \omega'$  dans  $G$  ?

**Problème de l'isomorphisme** Existe-t-il un algorithme permettant, donnés deux groupes  $G_1, G_2$  par des présentations finies  $G_1 \cong \langle X_1 \mid R_1 \rangle$ , et  $G_2 \cong \langle X_2 \mid R_2 \rangle$ , de décider si  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes ?

Le dernier problème, le problème de l'isomorphisme, a un statut différent des deux autres (il porte sur des présentations, et non sur des mots), et n'entre pas dans le cadre de notre travail. Nous ne le citons qu'à titre indicatif.

Notons  $\mathcal{P}$  une propriété algébrique, portant sur des  $p$ -uplets de  $G$ . Un problème de décision pour la présentation finie  $\langle X \mid R \rangle$ , est dans un sens heuristique, le problème consistant à déterminer un algorithme, qui décide pour tout  $p$ -uplet  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  de mots sur les générateurs, si  $\mathcal{P}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  dans  $G$ . Ces notions ont un statut mathématique, ou plus précisément, par le biais de la thèse de Church, la notion d'algorithme se conceptualise en théorie de la récursivité (ou calculabilité) (cf. [Da]). Nous continuerons cependant à considérer des algorithmes dans leur sens commun, «comme des recettes de cuisine».

Les problèmes du mot et de la conjugaison sont des exemples de problème de décision. Un algorithme qui résout un problème de décision, est appelé une solution à ce problème de décision. Un problème de décision est dit résoluble, s'il en existe une solution, et insoluble, dans le cas contraire.

Une solution au problème du mot pourra aussi être appelée algorithme du mot, et une solution au problème de la conjugaison, algorithme de conjugaison. Remarquons qu'une solution au problème de la conjugaison fournit une solution au problème du mot, puisque  $u = v$  dans  $G$  si et seulement si  $uv^{-1} \sim 1$  dans  $G$ .

Citons aussi le problème du mot généralisé.

**Problème du mot généralisé** Si  $w_1, \dots, w_n$  est une famille finie de mots sur  $X \cup X^{-1}$ , existe-t-il un algorithme permettant de décider pour tout mot  $\omega$  sur  $X \cup X^{-1}$ , si  $\omega \in \langle w_1, \dots, w_n \rangle \subset G$  ?

Une solution à un problème de décision, dépend clairement d'une présentation. Il est immédiat de vérifier que l'existence d'une solution, elle, n'en dépend pas.

**Proposition 1.4.1** *Si  $G$  muni de la présentation finie  $\langle X \mid R \rangle$ , admet une solution à un problème de décision (par exemple le problème du mot, de la conjugaison, ou du mot généralisé), alors  $G$  admet aussi une solution pour toute autre présentation finie.*

En particulier, on parlera de ces problèmes pour le groupe finiment présenté  $G$  et non plus pour une présentation de  $G$ . De plus si  $\langle X_1 \mid R_1 \rangle$  et  $\langle X_2 \mid R_2 \rangle$  sont deux présentations finies d'un groupe  $G$ , et si l'on dispose d'une solution à un problème de décision dans  $G$  pour la présentation  $\langle X_1 \mid R_1 \rangle$ , on peut en déduire une solution au même problème de décision pour la présentation  $\langle X_2 \mid R_2 \rangle$ , dès lors que l'on sait exprimer les éléments représentés dans  $G$  par les éléments de  $X_2$ , comme des mots sur  $X_1 \cup X_1^{-1}$ .

On dit qu'un groupe finiment présenté a un problème du mot résoluble si il existe une solution au problème du mot. Sinon on dira que  $G$  a un problème du mot insoluble. De la même façon on parlera de problème de la conjugaison résoluble ou insoluble pour  $G$ . En 1955, Novikov (indépendamment Boone) démontre l'impossibilité de l'existence d'une solution à ces problèmes dans le cas général (cf. [No]) :

**Théorème 1.4.1 (Novikov)** *Il existe un groupe finiment présenté ayant un problème du mot (et donc de la conjugaison), insoluble.*

De nombreux autres résultats d'insolubilité sont venus étayer cette perspective pessimiste. Citons en particulier

**Théorème 1.4.2** *Il existe un groupe finiment présenté ayant un problème du mot résoluble et un problème de la conjugaison insoluble.*

Voir [Mi1], [Mi2], pour une généralisation de ce résultat, avec la notion de degré d'insolubilité, ainsi que pour de nombreux autres résultats d'insolubilité.

La résolution de tels algorithmes étant centrale en théorie combinatoire des groupes, la démarche a alors consisté à chercher des classes de groupe, les plus larges possibles, admettant une solution au problème du mot et au problème de la conjugaison. Les plus belles réussites en ces domaines sont certainement la théorie des groupes hyperboliques de M. Gromov ([Gr]), et la théorie des groupes automatiques de D. Epstein, et *al.* ([CEHLPT]).

Les problèmes de Dehn sont essentiellement nés de l'étude des variétés topologiques par leur groupe fondamental. En effet, si  $M$  est un espace topologique connexe par arc, un lacet de  $M$  représente un élément trivial de  $\pi_1(M)$  ssi il est contractile, deux lacets représentent des éléments conjugués ssi ils sont librement homotopes, et un lacet représente un élément du sous-groupe  $H$  de  $G$ , ssi il se relève en un lacet dans le revêtement de  $M$  associé à  $H$ . Il est donc naturel de se demander quel est le statut de ces problèmes dans le groupe fondamental d'une variété.

M. Dehn a commencé par résoudre les algorithmes du mot et de la conjugaison, dans le groupe d'une surface fermée. Remarquons qu'il a employé pour cela des méthodes qui constituent les fondements d'une part significative de la théorie géométrique des groupes (groupes hyperboliques selon Gromov, groupes  $CAT(0)$ ).

**Théorème 1.4.3 (Dehn)** *Les groupes de surface ont un problème du mot et un problème de la conjugaison résoluble.*

Les groupes de surface ont une structure très particulière. A l'opposé, pour tout groupe finiment présenté  $G$ , et pour tout entier  $n \geq 4$ , dans les catégories TOP, PL, et DIFF, il existe une procédure canonique qui permet de construire une variété

de dimension  $n$  (connexe) fermée, ayant pour groupe fondamental  $G$  (cf. [BHP]). On obtient alors immédiatement le résultat suivant, que l'on peut bien sûr, affiner à volonté. Remarquons que c'est aussi pour cette raison que le problème de l'homéomorphisme est insoluble pour  $n \geq 4$  (cf. §9.4 de [JS]).

**Théorème 1.4.4** *Pour tout  $n \geq 4$ , dans les catégories  $PL$ ,  $TOP$ ,  $DIFF$ , il existe une variété de dimension  $n$ , fermée, ayant des problèmes du mot et de la conjugaison insolubles.*

Quant aux 3-variétés, la question reste ouverte. Tout groupe de 3-variété (compacte) est finiment présenté, mais tout groupe finiment présenté n'est pas le groupe d'une 3-variété. Par exemple, les groupes abéliens de rang au moins 4, ou les groupes de Baumslag-Solitar  $\langle a, b \mid b^a = b^p \rangle$  avec  $p \neq \pm 1$ , ne sont pas des groupes de 3-variétés (cf. [He], [JS]). On connaît cependant beaucoup de groupes de 3-variété. La classe des groupes de 3-variétés contient clairement la classe des groupes de surface (Si  $F$  est une surface, considérer un  $I$ -fibré à base cette surface, non trivial seulement lorsque  $F$  est non orientable), elle est aussi considérablement plus large.

En l'absence de théorème de classification des 3-variétés, on se placera toujours dans des sous-classes mieux appréhendées, *i.e.* la classe des 3-variétés Haken, ou la classe des 3-variétés vérifiant la conjecture de Thurston.

Le problème du mot a été résolu dans la plupart des cas.

**Théorème 1.4.5 (Waldhausen)** *Le problème du mot est résoluble dans la classe des groupes de 3-variétés Haken.*

Citons aussi,

**Théorème 1.4.6 (Epstein, Thurston)** *Soit  $M$  une 3-variété vérifiant l'hypothèse de géométrisation de Thurston, et  $\pi_1(M)$  son groupe fondamental. Alors  $\pi_1(M)$  admet une structure automatique, si et seulement si aucun des facteurs obtenus dans la décomposition topologique de  $M$ , n'est fermé, et modelé sur Sol ou sur Nil.*

Si la variété  $M$  est modelée sur Sol, alors  $M$  est Haken, et donc  $\pi_1(M)$  admet une solution au problème du mot. Si  $M$  est modelée sur Nil, alors  $\pi_1(M)$  est virtuellement nilpotent (cf. théorème 4.7.12 [Th3]). Or, un groupe nilpotent admet un problème du mot résoluble (cf. [Mi2]), et la propriété d'avoir un problème du mot résoluble est stable par extension finie (proposition 1.5.1). Ainsi, le problème du mot est résoluble dans le groupe d'une 3-variété vérifiant l'hypothèse de Thurston, et toujours avec la proposition 1.5.1, on peut généraliser ce résultat, au cas d'une variété de dimension 3, compacte, connexe (non nécessairement orientable). Une telle variété qui est non orientable, sera dite vérifier la conjecture de géométrisation de Thurston, si son revêtement double la vérifie.

**Corollaire 1.4.1** *Si  $M$  est une variété de dimension 3, connexe, compacte (non nécessairement orientable) vérifiant l'hypothèse de Thurston, son groupe fondamental a un problème du mot résoluble.*

Le problème de la conjugaison quant à lui reste ouvert, même dans la classe des 3-variétés vérifiant l'hypothèse de Thurston (rappelons qu'une structure automatique fournit une solution au problème du mot, mais pas au problème de la conjugaison, ou tout du moins personne n'a jamais démontré le contraire). La théorie des groupes biautomatique donne une solution dans le cas hyperbolique (théorème 11.4.1, [CEHLPT]), et Z.Sela a donné une solution dans le cas des groupes de Noeud ([Sel]).

**Théorème 1.4.7 (Epstein,Thurston)** *Le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique, admet une structure biautomatique.*

**Théorème 1.4.8 (Sela)** *Le problème de la conjugaison est résoluble dans le groupe d'un noeud.*

Le résultat essentiel de notre travail est le suivant :

**Théorème principal** *Le problème de la conjugaison est résoluble dans le groupe d'une 3-variété vérifiant l'hypothèse de Thurston.*

Pour établir ce résultat, nous montrerons indépendamment, les 3 résultats suivants (une justification sera établie dans la prochaine section).

**Théorème 5.5.1** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert (orientable). Son groupe  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble.*

**Théorème 7.1.2** *Soit  $M$  une 3-variété modelée sur Sol. Son groupe  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble.*

**Théorème 7.2.1** *Soit  $M$  une 3-variété fermée Haken, qui n'est pas un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ . Alors son groupe  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble.*

La démonstration du théorème 5.5.1 sera l'objet de la section 5.5, et celle du théorème 7.1.2, l'objet de la section 7.1. Tout le reste de notre travail, est dévoué à la démonstration du théorème 7.2.1, c'est à dire au cas Haken non fibré en tores sur le cercle. Nous emploierons pour cela, la stratégie utilisée par Sela dans le cas d'un noeud. Plus précisément, considérant la décomposition JSJ de la variété fermée  $M$ , nous réduirons le problème de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$  à des problèmes de décision dans les groupes des pièces obtenues après décomposition, c'est à dire à des groupes fondamentaux de variétés, admettant soit une fibration de Seifert, soit une structure hyperbolique de volume fini.

## 1.5 Réduction du problème de la conjugaison

L'objet de cette section est de réduire le problème de la conjugaison dans le groupe d'une 3-variété vérifiant la conjecture de Thurston, au cas de classes plus restrictives de 3-variétés. Le premier point important, est le résultat suivant (cf. [Mi2]):

**Proposition 1.5.1** *Les problèmes du mot et de la conjugaison sont stables par produit libre, i.e. si  $G, G_1, G_2$  sont des groupes finiment présentés, et  $G = G_1 * G_2$ , alors  $G$  a un problème du mot (respectivement de la conjugaison) résoluble si et seulement si  $G_1$  et  $G_2$  ont des problèmes du mot (de la conjugaison) résoluble.*

*Le problème du mot est stable par extension finie, i.e. si  $H$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$ , alors  $H$  a un problème du mot résoluble si et seulement si  $G$  a un problème du mot résoluble.*

**Remarque :** Le problème de la conjugaison quand à lui n'est pas stable par extension finie. Plus précisément il existe un groupe  $G$  ayant un problème de la conjugaison résoluble, contenant un sous-groupe  $H$  d'indice 2 ayant un tel problème insoluble, et il existe un groupe  $H$  ayant un problème de la conjugaison résoluble, et une extension d'indice 2,  $G$  de  $H$  ayant un tel problème insoluble (cf. [Mi2]).

**Corollaire 1.5.1** *Le problème de la conjugaison dans le groupe d'une 3-variété vérifiant l'hypothèse de Thurston, se réduit aux problèmes de la conjugaison dans les classes des groupes de 3-variétés  $\partial$ -irréductibles, qui sont soit Haken, soit des fibrés de Seifert, soit modélés sur Sol.*

**Démonstration** Avec la proposition 1.5.1 et la décomposition des 3-variétés on peut supposer que  $M$  est irréductible, et  $\partial$ -irréductible. Alors soit  $M$  est Haken, soit non. Si  $M$  n'est pas Haken, alors soit  $M$  est hyperbolique fermée, et alors son groupe, Gromov-hyperbolique, a un problème de la conjugaison résoluble (cf. §4.2), soit  $M$  est un fibré de Seifert. (Si  $M$  est modelé sur Sol, alors  $M$  est Haken). ■

Quant au deuxième point important, c'est le fait que si  $2G$  désigne le double d'un groupe, et si  $u, v \in G$ , alors  $u \sim v$  dans  $G$  si et seulement si  $u \sim v$  dans  $2G$ . Ce point sera démontré dans le chapitre 3, section 3.2.4, où nous aurons mis en place, les notions adéquates. Ainsi, en doublant la variété le long de ses composantes au bord, on peut encore ramener le cas Haken, au cas Haken fermé.

**Proposition 1.5.2** *Le problème de la conjugaison dans le groupe d'une variété Haken  $\partial$ -irréductible, se réduit au problème de la conjugaison dans le groupe d'une variété Haken fermée.*

**Démonstration** Soit  $M$  une 3-variété Haken  $\partial$ -irréductible ayant un bord non vide. On double  $M$  le long de ses composantes au bord. On obtient une variété Haken fermée dont le groupe fondamental est le double  $2\pi_1(M)$  de  $\pi_1(M)$ . Si  $2\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble, c'est aussi le cas pour  $\pi_1(M)$ , puisque avec la proposition 3.2.3, une solution dans  $2\pi_1(M)$  fournit une solution dans  $\pi_1(M)$ . ■

Nous aurons besoin dans le cas Haken fermé de distinguer le cas d'un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$  des autres cas. Nous discuterons plus en détail de ce point dans le chapitre 7.

# Chapitre 2

## Le groupe d'une variété Haken fermée

Dans la première section de ce chapitre, nous énonçons le théorème de décomposition Jaco-Shalen-Johannson d'une 3-variété Haken fermée, et nous définissons le vocabulaire associé. Nous remarquons les résultats — qui nous seront utiles dans les chapitres 6 et 7 — sur les propriétés d'une décomposition JSJ minimale (propositions 2.1.1 et 2.1.2).

Dans la deuxième section, nous définissons la notion de graphe de groupe, et remarquons comment le groupe d'une variété Haken, se décompose en groupe fondamental d'un graphe de groupe, associé à la décomposition JSJ de la variété.

### 2.1 Décomposition JSJ d'une variété Haken

#### 2.1.1 Théorème Jaco-Shalen-Johannson

Soit  $W$  une surface compacte, à deux faces, proprement plongée dans une 3-variété  $M$ . On notera  $\sigma_W(M)$  la 3-variété obtenue en décomposant  $M$  le long de  $W$ . Plus précisément, si  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$  sont les composantes connexes de  $W$ , on peut trouver des voisinages réguliers des composantes,  $V(\mathcal{T}_1), \dots, V(\mathcal{T}_n)$ , deux à deux disjoints, et  $\sigma_W(M)$  est défini par :

$$\sigma_W(M) = M - \bigcup_{i=1}^n \text{int}(V(\mathcal{T}_i))$$

La 3-variété  $\sigma_W(M)$  est en général non connexe. Si  $W \neq \emptyset$ , toutes les composantes connexes de  $\sigma_W(M)$  sont à bord non vide. Nous pouvons, dès lors énoncer le théorème de décomposition des variétés Haken fermées (cf. [JS] corollaire V.5.1.):

**Théorème 2.1.1 (Jaco-Shalen-Johannson)** *Soit  $M$  une 3-variété Haken fermée. Il existe une surface  $W$  proprement plongée dans  $M$ , incompressible, à deux faces, unique à isotopie ambiante de  $M$  près, vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) *Les composantes connexes de  $W$  sont des tores.*

- (ii) Chaque composante connexe de  $\sigma_W(M)$  est un fibré de Seifert, ou atoroidale.
- (iii)  $W$  est minimale par rapport à l'inclusion, dans la classe des surfaces vérifiant les propriétés précédentes.

**Remarque 1 :** Le théorème reste vrai si  $M$  est une 3-variété Haken,  $\partial$ -irréductible de caractéristique d'Euler  $\chi = 0$  (ou de façon équivalente à bord torique ou vide). Si  $M$  contient dans son bord une surface de genre  $> 1$ , le résultat se généralise en décomposant  $M$  le long d'anneaux et de tores essentiels. Les composantes connexes de  $\sigma_W(M)$  sont alors des fibrés de Seifert, des  $I$ -fibrés localement triviaux, ou bien vérifient une condition topologique plus forte que la notion d'atoroidal (la difficulté provient du cas où le bord d'une telle composante contient une surface de genre  $> 1$ ).

**Remarque 2 :** Si l'on décompose une 3-variété  $M$  irréductible le long de surfaces incompressibles, les variétés obtenues sont encore irréductibles. Dans le cas où la décomposition s'effectue le long de tores, si  $M$  est  $\partial$ -irréductible, les variétés obtenues le sont aussi. De plus, si  $W \neq \emptyset$ , elles sont à bord non vide, ainsi, les composantes connexes de  $\sigma_W(M)$  sont Haken.

**Remarque 3 :** Avec le théorème d'hyperbolisation de Thurston (cf. §1.3), les composantes connexes de  $\sigma_W(M)$  admettent soit une fibration de Seifert, soit une structure hyperbolique de volume fini.

### 2.1.2 Décomposition d'une 3-variété en pièces élémentaires

Dans tout ce paragraphe, on note  $M$  une 3-variété Haken de caractéristique d'Euler  $\chi(M) = 0$ .

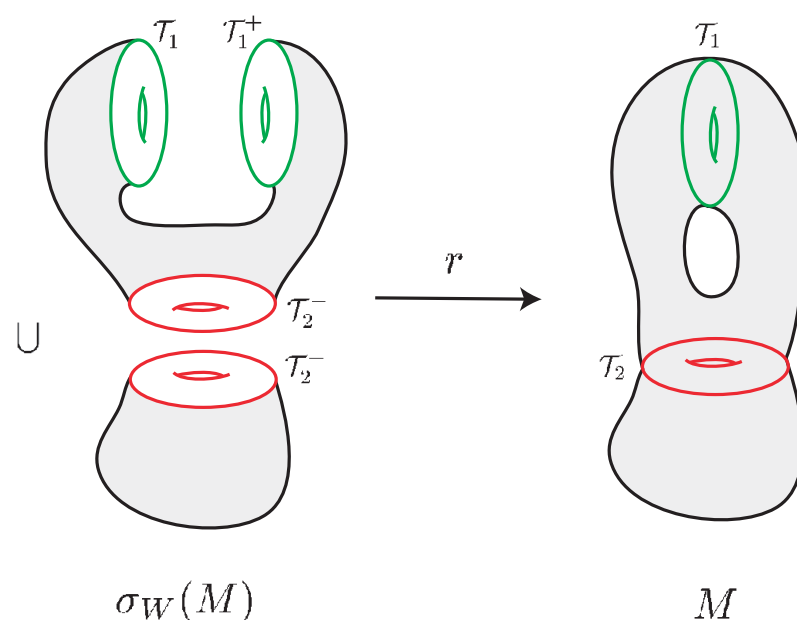


FIG. 2.1 – Décomposition de  $M$  le long de  $W = T_1 \cup T_2$ .

On appelle **décomposition JSJ** de  $M$ , une surface  $W$  incompressible, à deux faces, proprement plongée dans  $M$ , vérifiant les conditions (i) et (ii), du théorème



2.1.1. On appelle **décomposition minimale** de  $M$ , une surface  $W$  vérifiant les hypothèses (et les conclusions) du théorème 2.1.1. Bien sûr, une décomposition de  $M$  (resp. minimale) existe toujours. Nous verrons dans le prochain paragraphe, des exemples de décomposition non minimale. On dira que la décomposition est **triviale** si  $W = \emptyset$ .

Considérons une décomposition  $W$  de  $M$ . Il existe une application canonique, **l'application d'identification**,  $r : \sigma_W(M) \longrightarrow M$ , qui est telle que  $r^{-1}(W)$  consiste en deux copies homéomorphes de  $W$  dans  $\partial M$ , et que  $r$  restreinte à  $r^{-1}(M - W)$  soit un homéomorphisme.

Notons  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_i, \dots, \mathcal{T}_k$  les composantes connexes de  $W$  (en nombre fini, puisque  $W$  est compacte). Ce sont des tores, proprement plongés dans  $M$ . Puisque pour tout  $i$ ,  $\mathcal{T}_i$  est à deux faces dans  $M$ ,  $r^{-1}(\mathcal{T}_i)$  consiste en deux copies homéomorphes de  $\mathcal{T}_i$ , dans  $\partial\sigma_W(M)$ . On les note arbitrairement  $\mathcal{T}_i^-$ , et  $\mathcal{T}_i^+$ .

Les restrictions de  $r$  à  $\mathcal{T}_i^-$  et  $\mathcal{T}_i^+$  sont des homéomorphismes sur  $\mathcal{T}_i$ . Cela permet de définir l'homéomorphisme  $f_i : \mathcal{T}_i^- \longrightarrow \mathcal{T}_i^+$ , qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_i^- & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{T}_i^+ \\ r|_{\mathcal{T}_i^-} \downarrow & & \downarrow r|_{\mathcal{T}_i^+} \\ \mathcal{T}_i & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathcal{T}_i \end{array}$$

Ainsi, pour  $i = 1, \dots, k$ , on dispose d'un homéomorphisme naturel  $f_i$  de  $\mathcal{T}_i^-$  à  $\mathcal{T}_i^+$ . On appellera  $f_i$ , l'homéomorphisme associé à  $\mathcal{T}_i$ , et de façon moins précise, un tel  $f_i$ , un **homéomorphisme associé à la décomposition**.

On note  $M_1, \dots, M_p$ , les composantes connexes (en nombre fini, par compacité de  $M$  et de  $W$ ), de  $\sigma_W(M)$ . On les appelle les **pièces élémentaires** de la décomposition. Ainsi,

$$M \cong \left( \bigcup_{i=1 \dots p} M_i \right)_{f_1, \dots, f_p}$$

### 2.1.3 Minimalité de la décomposition

Soient  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux tores, et  $f_1 : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{T}_1$ ,  $f_2 : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  des homéomorphismes. On considère  $S^1 \times S^1 \times I$ , et les homéomorphismes  $\bar{f}_1 : S^1 \times S^1 \times \{-1\} \longrightarrow \mathcal{T}_1$  et  $\bar{f}_2 : S^1 \times S^1 \times \{1\} \longrightarrow \mathcal{T}_2$ , définis par  $\bar{f}_1(x, -1) = f_1(x)$  et  $\bar{f}_2(x, 1) = f_2(x)$ , pour tout  $x \in S^1 \times S^1$ .

Soit  $M$  une 3-variété orientable, et  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ , deux composantes toriques dans  $\partial M$ . Il est aisé de décrire les homéomorphismes suivant :

$$M \cup S^1 \times S^1 \times I \xrightarrow{\bar{f}_1} M$$

et

$$M \cup S^1 \times S^1 \times I \xrightarrow{\bar{f}_1, \bar{f}_2} M \xrightarrow{f_2 \circ f_1^{-1}}$$

De même, si  $M, M'$  sont deux variétés orientables, et  $\mathcal{T}_1 \subset \partial M, \mathcal{T}_2 \subset \partial M'$  sont deux composantes toriques,

$$M \cup S^1 \times S^1 \times I \cup M' \xrightarrow{\bar{f}_1, \bar{f}_2} \cong M \cup M' \xrightarrow{f_2 \circ f_1^{-1}}$$

Ainsi considérons, une 3-variété  $M$  Haken, et une décomposition le long de  $W$ . Supposons que  $S^1 \times S^1 \times I$  soit une pièce élémentaire apparaissant dans la décomposition. Si la décomposition est non triviale, alors avec tout ce qui précède, soit on peut trouver une décomposition  $W' \subsetneq W$ , soit  $S^1 \times S^1 \times I$  est l'unique pièce apparaissant dans la décomposition. On résume ce fait dans la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1** *Soit  $M$  une variété Haken fermée et  $W$  une décomposition minimale. Si  $S^1 \times S^1 \times I$  est une pièce élémentaire de la décomposition, alors  $M$  est un  $S^1 \times S^1$  fibré sur  $S^1$ .*

Soit  $M$  un fibré de Seifert, et  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux composantes toriques de  $\partial M$ . On considère un homéomorphisme  $f : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  et la variété  $M \cup_f$  obtenue en recollant  $M$  par  $f$ .

Si  $M$  est muni d'une fibration,  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont fibrés (trivialement) par des fibres régulières. Si l'image par  $f$  d'une fibre régulière  $c \in \mathcal{T}_1$  est homotope dans  $\mathcal{T}_2$  à une fibre régulière de  $\mathcal{T}_2$ , alors la fibration de  $M$  s'étend en une fibration de  $M \cup_f$ .

Si  $M$  et  $M'$  sont deux fibrés de Seifert,  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux tores,  $\mathcal{T}_1 \subset \partial M, \mathcal{T}_2 \subset \partial M'$ , et  $f : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  un homéomorphisme. On considère la variété  $M \cup M' \cup_f$ .

Si  $M$  et  $M'$  sont munis de fibrations, si  $c$  est une fibre régulière de  $\mathcal{T}_1$ , et  $f(c)$  est homotope dans  $\mathcal{T}_2$  à une fibre régulière de  $m_2$ , alors les fibrations de  $M$  et  $M'$  s'étendent en une fibration de  $M \cup M' \cup_f$ . On a ainsi, clairement :

**Proposition 2.1.2** *Soit  $M$  une 3-variété Haken fermée, et  $W$  une décomposition minimale de  $M$ . Soient  $M_1, M_2$  deux pièces élémentaires de la décomposition (éventuellement  $M_1 = M_2$ ), qui soient des fibrés de Seifert. Soient  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  des composantes toriques respectives de  $\partial M_1, \partial M_2$ , distinctes, et  $f : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  un homéomorphisme associé à la décomposition.*

*Alors si  $c_1$  et  $c_2$  sont des fibres régulières de  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ,  $f(c_1)$  et  $c_2$  ne sont pas homotopes dans  $\mathcal{T}_2$ .*

Si  $W$  est une décomposition minimale de la 3-variété  $M$ , et si  $r$  désigne l'application d'identification, et  $M_1, M_2, \dots, M_p$  les pièces élémentaire de la décomposition, la **sous-variété de Seifert** de  $M$ , est la sous-variété de  $M$ , dont les composantes connexes sont les images par  $r$ , de  $\text{Int}(M_i)$ , pour tout pièce  $M_i$  admettant une fibration de Seifert.

## 2.2 Groupe fondamental d'une variété Haken

### 2.2.1 Produits amalgamés et extensions HNN

Nous rappelons les définitions et les propriétés fondamentales d'un produit amalgamé, et d'une extension HNN. Nous ne ferons qu'énoncer les résultats sans en fournir de preuve, le lecteur pouvant se référer aux ouvrages [MKS], [LS], [Ro], (etc...).

**Produits amalgamés.** Soient  $A$  et  $B$  des groupes donnés par les présentations respectives  $\langle S \mid R \rangle$  et  $\langle S' \mid R' \rangle$ . Soient  $C_A$  un sous-groupe de  $A$ ,  $C_B$  un sous-groupe de  $B$ , et  $\phi : C_A \longrightarrow C_B$  un isomorphisme. On appelle **produit amalgamé** de  $A$  et  $B$  le long de  $\phi$ , le groupe que l'on note  $A *_\phi B$ , donné par la présentation :

$$A *_\phi B \cong \langle S \cup S' \mid R \cup R' \cup \{\phi(c) = c \quad \forall c \in C_A\} \rangle$$

Si les présentations de  $A$  et  $B$  sont finies, et si  $C_A$  est de type fini,  $A *_\phi B$  est de présentation finie. En fait si  $c_1, \dots, c_n$  est une famille génératrice de  $C_A$ , on a la présentation finie :

$$A *_\phi B \cong \langle S \cup S' \mid R \cup R' \cup \{\phi(c_i) = c_i \quad i = 1, \dots, n\} \rangle$$

On considère l'application d'inclusion de  $S$  dans  $S \cup S'$ . Elle s'étend naturellement en un unique homomorphisme du groupe libre  $F(S)$ , dans le groupe libre  $F(S \cup S')$ , qui passe au quotient pour donner un homomorphisme de  $A$  dans  $A *_\phi B$ . De la même façon on définit un homomorphisme naturel de  $B$  dans  $A *_\phi B$ , qui étend l'inclusion de  $S'$  dans  $S \cup S'$ .

**Proposition 2.2.1** *Les homomorphismes naturels de  $A$  et de  $B$  dans  $A *_\phi B$ , sont injectifs.*

On les appellera les plongements naturels, et on les notera :

$$\begin{aligned} i_A : A &\longrightarrow A *_\phi B \\ i_B : B &\longrightarrow A *_\phi B \end{aligned}$$

L'image de  $A$  est appelée premier facteur, celle de  $B$  deuxième facteur. On ne distinguera pas en général  $A$  et  $B$  de leur image  $i_A(A)$  ou  $i_B(B)$  par ces plongements. Ainsi  $A$  et  $B$  seront considérés comme des sous-groupes de  $A *_\phi B$ . De plus, les sous-groupes  $i_A(C_A)$  et  $i_B(C_B)$  de  $A *_\phi B$ , sont confondus, en un sous-groupe que l'on note  $C$  ; en fait :

$$C = i_A(C_A) = i_B(C_B) = i_A(A) \cap i_B(B)$$

Nous pourrions dire, de façon quelque peu imprécise, que  $A *_\phi B$  est un amalgame de  $A$  et  $B$ , le long du sous-groupe  $C$ , et le noter  $A *_C B$ .

Si  $g$  est un élément de  $A *_\phi B$ , une **forme normale** pour  $g$ , est une suite finie  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  d'éléments de  $A *_\phi B$ , vérifiant les conditions :

- $\forall i = 1, \dots, n, g_i \in A - C$ , ou  $g_i \in B - C$ .
- $\forall i = 1, \dots, n-1$ , si  $g_i \in A$ , alors  $g_{i+1} \in B$ .
- $g = g_1 g_2 \cdots g_n$  dans  $A *_\phi B$ .

Puisque  $A *_\phi B$  a pour famille génératrice  $S \cup S'$ , où  $S$  engendre  $A$ ,  $S'$  engendre  $B$  et que  $A \cap B = C$  dans  $A *_\phi B$ , alors clairement, tout élément admet une forme normale. Dans un certain sens, cette forme normale est unique. C'est le théorème fondamental des produits libres amalgamés.

**Théorème 2.2.1 (forme normale)** *Considérons un élément  $g$  de  $A *_\phi B$ , ainsi que  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  et  $(g'_1, g'_2, \dots, g'_m)$  deux formes normales de  $g$ . Alors  $m = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $g_i$  et  $g'_i$  sont dans un même facteur, et  $g_1^{-1} g'_1 \in C$ .*

L'entier  $n$  sera appelé **longueur** de l'élément  $g$ , et noté  $|g|$ . En particulier  $|g| = 1$  ssi  $g$  est dans un des facteurs.

Nous utiliserons plutôt la formulation suivante. Si  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  est une forme normale pour  $g$ , où les  $g_i$  sont des mots sur  $S$  ou sur  $S'$ , alors le mot  $g_1 g_2 \cdots g_n$  représente  $g$  dans  $A *_\phi B$ , et pourra être dénommé d'**écriture sous forme réduite** (ou par abus de langage, d'écriture sous forme normale) de l'élément  $g$ , pour la décomposition de  $A *_\phi B$  en amalgame de  $A$  et  $B$  le long de  $\phi$ .

Nous avons une motivation topologique à l'introduction d'un produit amalgamé, donnée par un cas particulier d'application du théorème de Van-Kampen. Soient  $M_1, M_2, N_1, N_2$  des espaces connexes par arc, non vides, avec  $N_1 \subset M_1$ ,  $N_2 \subset M_2$ , tels que  $N_1$  et  $N_2$  soient des ouverts homéomorphes, et que si  $i_1 : N_1 \rightarrow M_1$  et  $i_2 : N_2 \rightarrow M_2$  désignent les inclusions, alors les homomorphismes induits sur les groupes fondamentaux  $i_{1*} : \pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(M_1)$  et  $i_{2*} : \pi_1(N_2) \rightarrow \pi_1(M_2)$  sont des monomorphismes. Soit  $f : N_1 \rightarrow N_2$  un homéomorphisme. Alors l'espace topologique  $(M_1 \cup M_2)_f$  est connexe par arc, et son groupe fondamental est isomorphe au produit amalgamé de  $\pi_1(M_1)$ , et de  $\pi_1(M_2)$  le long de l'isomorphisme  $f_* : i_{1*}(\pi_1(N_1)) \rightarrow i_{2*}(\pi_1(N_2))$ .

$$\pi_1(M_1 \cup M_2)_f \cong \pi_1(M_1) *_f \pi_1(M_2)$$

**Extensions HNN.** Soit  $A$  un groupe,  $C_{-1}$  et  $C_{+1}$  des sous-groupes de  $A$ , et  $\phi : C_{-1} \rightarrow C_{+1}$  un isomorphisme. Si  $A$  admet pour présentation  $\langle S \mid R \rangle$ , on appelle **extension HNN** de  $A$ , relativement à  $\phi$ , le groupe que l'on notera  $A *_\phi$ , de présentation,

$$A *_\phi \cong \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{c = t\phi(c)t^{-1} \mid \forall c \in C_{-1}\} \rangle$$

Si le sous-groupe  $C_{-1}$  admet une famille génératrice finie,  $c_1, \dots, c_n$ , alors  $A *_\phi$  admet la présentation finie,

$$A *_\phi \cong \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{c_i = t\phi(c_i)t^{-1} \mid \forall i = 1, \dots, n\} \rangle$$

On considère l'application identité de  $S$  dans  $S$ . Elle s'étend de façon unique en un homomorphisme de  $F(S)$  dans  $F(S \cup \{t\})$ , qui passe au quotient pour donner un homomorphisme naturel de  $A$  dans  $A*_\phi$ .

**Proposition 2.2.2** *L'homomorphisme naturel de  $A$  dans  $A*_\phi$  est un plongement.*

On note  $i_A : A \longrightarrow A*_\phi$  le plongement naturel. Nous confondons  $A$  et son image  $i_A(A)$  par  $i_A$ , ainsi nous verrons  $A$  comme un sous-groupe de  $A*_\phi$ .

Etant donné un élément  $\gamma \in A*_\phi$ , une **forme normale** pour  $g$ , est une suite finie d'éléments de  $A*_\phi$ , de la forme  $(g_1, t^{\varepsilon_1}, g_2, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_{n+1})$ , vérifiant :

- $\forall i = 1, \dots, n+1, g_i \in A$ , et  $\forall i = 1, \dots, n, \varepsilon_i = \pm 1$ .
- $\forall i = 1, \dots, n-1$ , si  $\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i$ , alors  $g_{i+1} \notin C_{\varepsilon_i}$ .
- $g = g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_n} g_{n+1}$  dans  $A*_\phi$ .

Une **forme réduite** (ou par abus de langage : forme normale) pour  $g$  est un mot sur  $S \cup \{t\}$ , de la forme  $g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_n} g_{n+1}$ , où les  $g_i$  sont des mots sur  $S$ , et  $(g_1, t^{\varepsilon_1}, g_2, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_{n+1})$  est une forme normale pour  $g$ .

Un mot de la forme  $t^\varepsilon c t^{-\varepsilon}$ , où  $\varepsilon = \pm 1$ , et  $c \in C_\varepsilon$ , est appelé un **pinch**. Si un mot contient un tel pinch, l'opération consistant à remplacer ce sous-mot par le mot  $\phi^{-\varepsilon}(c)$ , ne change pas l'élément de  $A*_\phi$  représenté. Ainsi, clairement tout élément admet une forme normale.

Le théorème suivant est le résultat fondamental pour les extensions HNN, qui garantit l'unicité d'une forme normale. Il est connu sous le nom de lemme de Britton.

**Théorème 2.2.2 (Lemme de Britton)** *L'élément  $1 \in A*_\phi$ , admet pour unique forme normale, la suite (1) .*

On peut alors facilement établir, que si  $g$  admet pour formes normales à la fois,  $(g_1, t^{\varepsilon_1}, g_2, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_{n+1})$  et  $(g'_1, t^{\mu_1}, g'_2, t^{\mu_2}, \dots, t^{\mu_m}, g'_{m+1})$ , alors nécessairement,  $n = m$ ,  $\forall i = 1, \dots, n, \varepsilon_i = \mu_i$ , et  $g'_1{}^{-1} g_1 \in C_{-\varepsilon_1}$  et  $g_{n+1} g'_{n+1}{}^{-1} \in C_{\varepsilon_n}$ . En particulier l'entier  $n$  est unique, et on appelle **longueur** de  $g$ , notée  $|g|$ , l'entier défini par  $|g| = n + 1$ . Ainsi,  $|g| = 1 \iff g \in A$ .

Comme précédemment, nous avons une motivation topologique à l'introduction des extensions HNN, via une adaptation du théorème de Van-Kampen. Soit  $M$  un espace connexe par arc, et  $N_1, N_2$  deux ouverts connexes par arc, disjoints dans  $M$ , et homéomorphes. Soit  $f : N_1 \longrightarrow N_2$  un homéomorphisme. Si  $i_1$  et  $i_2$  désignent les inclusions respectives de  $N_1$  et  $N_2$  dans  $M$ , et si  $i_{1*} : \pi_1(N_1) \longrightarrow \pi_1(M)$  et  $i_{2*} : \pi_1(N_2) \longrightarrow \pi_1(M)$  sont des monomorphismes, alors  $\pi_1(M \text{ }_f)$  est isomorphe à l'extension HNN de  $\pi_1(M)$ , le long de  $f_* : i_{1*}(\pi_1(N_1)) \longrightarrow i_{2*}(\pi_1(N_2))$ .

$$\pi_1(M \text{ }_f) \cong \pi_1(M) *_{f_*}$$

### 2.2.2 Graphe de groupe

Un **graphe fini**  $X$  est la donnée de deux ensembles finis  $\mathcal{A}_X$  et  $\mathcal{S}_X$ , d'une involution  $j : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{A}_X$ , vérifiant  $\forall a \in \mathcal{A}_X, j(a) \neq a$ ; et de deux applications  $o, e : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{S}_X$ , vérifiant  $\forall a \in \mathcal{A}_X, e(a) = o \circ j(a)$ .

Les éléments de  $\mathcal{A}_X$  seront appelés des **arêtes**, et les éléments de  $\mathcal{S}_X$ , des **sommets**. On notera  $-a = j(a)$ , et les arêtes  $a$  et  $-a$  seront dites opposées.

Une **orientation** de  $X$ , est un sous-ensemble  $\mathcal{A}_X^+$  de  $\mathcal{A}_X$ , contenant, pour tout  $a \in \mathcal{A}_X$ , exactement un élément de l'ensemble  $\{a, -a\}$ . Un graphe muni d'une orientation sera dit **orienté**.

Un **chemin** de  $X$  est une suite finie d'arêtes,  $c = (a_1, \dots, a_n)$ , vérifiant  $\forall i = 1, \dots, p-1, e(a_i) = o(a_{i+1})$ . Les sommets  $o(a_1)$  et  $e(a_n)$ , sont appelés respectivement origine et extrémité du chemin  $c$ . Le chemin est dit **fermé** si  $o(a_1) = e(a_n)$ . Il est dit **réduit**, si  $\forall i = 1, \dots, p-1, a_i \neq -a_{i+1}$ .

Un graphe  $X$  est dit **connexe**, si pour tout couple de sommets,  $s_1, s_2$ , il existe un chemin de  $X$  ayant pour origine  $s_1$ , et pour extrémité  $s_2$ .

Un graphe est un **arbre**, si pour tout couple de sommets  $s_1, s_2$ , il existe un unique chemin réduit d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_2$ . C'est un fait bien connu, que tout graphe fini  $X$  contient un arbre maximal, *i.e.* un sous-graphe qui est un arbre, et qui a même sommets que  $X$ . Il n'est en général pas unique.

Un **graphe de groupe**  $(\mathcal{G}, X)$  est la donnée d'un graphe fini connexe, orienté, et d'une famille  $\mathcal{G}$ , consistant en :

Un ensemble  $\mathcal{G}\mathcal{A}_X = \{G_a, a \in \mathcal{A}_X^+\}$  de groupes, appelés **groupes d'arête**.

Un ensemble  $\mathcal{G}\mathcal{S}_X = \{G_s, s \in \mathcal{S}_X\}$  de groupes, appelés **groupes de sommet**. Pour tout  $a \in \mathcal{A}_X^+$ , les monomorphismes

$$\phi_a : G_a \longrightarrow G_{o(a)}$$

$$\phi_{-a} : G_a \longrightarrow G_{e(a)}$$

Un **lacet** dans  $(\mathcal{G}, X)$  est une suite de la forme  $(g_0, a_1, g_1, \dots, a_n, g_n)$ , où  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est un chemin fermé de  $X$ , et  $\forall k = 1, \dots, n, g_{k-1} \in G_{o(a_k)}$ , et  $g_n \in G_{e(a_n)}$ . On dit qu'il a pour origine  $o(a_1)$ .

Il existe une relation d'équivalence  $\equiv$  pour les lacets de  $(\mathcal{G}, X)$ , engendrée par les relations :

$$\forall a \in \mathcal{A}_X, \forall h \in G_a, \forall g \in G_{o(a)} \quad (g, a, \phi_{-a}(h), -a, \phi_a(h)^{-1}) = (g)$$

et

$$\forall a \in \mathcal{A}_X, \forall g, g' \in G_{o(a)}, \quad (g, a, 1, -a, g') = (gg')$$

Si  $s_0$  est un sommet de  $X$ , l'ensemble des lacets d'origine  $s_0$ , admet une opération, appelée opération de concaténation :

$$(g_0, a_1, \dots, a_p, g_p) \cdot (g_{p+1}, a_{p+1}, \dots, a_n, g_{n+1}) = (g_0, a_1, \dots, a_p, g_p g_{p+1}, a_{p+1}, \dots, a_n, g_{n+1})$$

Cette opération se quotiente par la relation  $\equiv$  en une opération sur l'ensemble des classes d'équivalence de lacets basés en  $s_0$ , qui admet dès lors une structure de groupe. On l'appelle le **groupe fondamental** de  $(\mathcal{G}, X)$ , basé en  $s_0$ , et on le note  $\pi_1(\mathcal{G}, X, s_0)$ . Si tous les groupes de sommets (et donc les groupes d'arêtes) sont triviaux, on retrouve le groupe fondamental de  $X$  basé en  $s_0$ .

Le théorème qui suit est un résultat fondamental pour les graphes de groupe, du point de vue de la théorie combinatoire des groupes. C'est le seul résultat sur les graphes de groupe que nous emploierons pour mener à bien notre étude, délaissant pour ce propos le concept de groupe agissant sans inversion sur un arbre. (cf. [Ser], [DD]).

**Théorème 2.2.3** *Soient  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe,  $s_0$  un sommet de  $X$ , et  $T$  un arbre maximal de  $X$ .*

*Alors  $\pi_1(\mathcal{G}, X, s_0)$  est le groupe obtenu à partir du produit libre  $(\ast_{s \in \mathcal{S}_X} G_s) \ast F$ , où  $F$  est le groupe libre engendré par  $\{t_a; a \in \mathcal{A}_X\}$ , en ajoutant les relations :*

$$\begin{aligned} \phi_a(h) &= t_a \phi_{-a}(h) t_a^{-1} & \forall a \in \mathcal{A}_X^+, \forall h \in G_a \\ t_{-a} &= t_a^{-1} & \forall a \in \mathcal{A}_X \\ t_a &= 1 & \forall a \in \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_T \end{aligned}$$

**Remarque 1 :** Ainsi  $\pi_1(\mathcal{G}, X, s_0)$  ne dépend pas du choix du point de base  $s_0$ . On parlera du groupe fondamental de  $(\mathcal{G}, X)$  que l'on notera  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

**Remarque 2 :** Un graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ , muni d'un arbre maximal  $T$  de  $X$ , est appelé un **graphe décomposé**. On pourra le noter  $(\mathcal{G}, X, T)$ . Donné un arbre maximal  $T$  de  $X$ , un élément de  $\mathcal{A}_T$  sera appelé **arête  $T$ -séparante**, et un élément de  $\mathcal{A}_X - \mathcal{A}_T$ , **arête non  $T$ -séparante**.

**Remarque 3 :** Si  $X = T$  est un arbre,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est l'amalgame des groupes de sommets  $G_s, s \in \mathcal{S}_T$ , le long des isomorphismes  $\phi_{-a} \circ \phi_a^{-1}$  définis pour tout  $a \in \mathcal{A}_T^+$ . Ainsi pour tout  $s \in \mathcal{S}_T$ , on a le morphisme injectif

$$p_s : G_s \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$$

Si  $X$  n'est pas un arbre,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est l'extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ , le long des isomorphismes  $p_{e(a)} \circ \phi_{-a} \circ \phi_a^{-1} \circ p_{o(a)}^{-1}$  pour toute arête  $a$  non  $T$ -séparante (*i.e.*  $a \in \mathcal{A}_X^+ \cap (\mathcal{A}_X - \mathcal{A}_T)$ ). Ainsi on a le morphisme injectif

$$\Pi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, X)$$

On a donc, pour tout sommet  $s \in \mathcal{S}_T = \mathcal{S}_X$ , un plongement naturel  $\Pi_s = \Pi \circ p_s$  de  $G_s$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Ces plongements ne dépendent que de la donnée d'un arbre maximal  $T$  de  $X$ . Lorsque  $T$  sera fixé (ce qui sera toujours le cas), on commettra l'abus de langage de confondre  $\Pi_s(G_s)$  avec  $G_s$ . Ainsi on pourra voir  $G_s$  comme un sous-groupe de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Un tel sous-groupe de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  sera appelé **sous-groupe de sommet**.

Pour toute arête  $a$   $T$ -séparante (i.e  $a \in \mathcal{A}_T^+$ ), d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_2$ , les applications de  $G_a$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ ,  $\Pi_{s_1} \circ \phi_a$  et  $\Pi_{s_2} \circ \phi_{-a}$  sont égales. On confondra  $G_a$  et  $\Pi_{s_1} \circ \phi_a(G_a) = \Pi_{s_2} \circ \phi_{-a}(G_a) \subset G_{s_1} \cap G_{s_2} \subset \pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

Soit  $a \in \mathcal{A}_X$  une arête, d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_2$ , on notera

$$\begin{aligned} G_a^- &= \Pi_{s_1} \circ \phi_a(G_a) \\ G_a^+ &= \Pi_{s_2} \circ \phi_{-a}(G_a) \end{aligned}$$

et  $\varphi_a$ , l'isomorphisme de  $G_a^-$  dans  $G_a^+$ , défini par

$$\varphi_a(h) = \Pi_{s_2} \circ \phi_{-a} \circ \phi_a^{-1} \circ \Pi_{s_1}^{-1}(h) \quad \text{pour tout } h \in G_a^-$$

Si  $a$  est  $T$ -séparante, les applications  $\Pi_{s_1} \circ \phi_a$  et  $\Pi_{s_2} \circ \phi_{-a}$  sont identiques, ainsi  $G_a^- = G_a^+ = G_a$ , et  $\varphi_a = \varphi_{-a}$  est l'identité. Si  $a$  est non  $T$ -séparante, en général  $G_a^- \neq G_a^+$ , et dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , on a la relation

$$\forall h \in G_a^-, \quad h = t_a \varphi_a(h) t_a^{-1}$$

Les sous-groupes  $G_a^-, G_a^+$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  seront appelés **sous-groupes d'arête**. Notons que  $G_a^- \subset G_{o(a)} = G_{s_1}$ ,  $G_a^+ \subset G_{e(a)} = G_{s_2}$ .

**Remarque 4 :** Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe, et  $Y$  un sous-graphe orienté de  $X$  (i.e.  $X$  et  $Y$  sont d'orientations compatibles). On peut construire un **sous-graphe de groupe**  $(\mathcal{G}', Y)$  de  $(\mathcal{G}, X)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'\mathcal{S}_Y &= \{G_s \in \mathcal{G}\mathcal{S}_X ; s \in \mathcal{S}_Y\} \\ \mathcal{G}'\mathcal{A}_Y &= \{G_a \in \mathcal{G}\mathcal{A}_X ; a \in \mathcal{A}_Y\} \end{aligned}$$

et les monomorphismes de  $\mathcal{G}'$  sont les monomorphismes de  $\mathcal{G}$ ,  $\phi_a$  et  $\phi_{-a}$  pour tout  $a \in \mathcal{A}_Y^+ \subset \mathcal{A}_X^+$ .

Dans la suite, on notera  $(\mathcal{G}, Y)$  au lieu de  $(\mathcal{G}', Y)$ . Observons que  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  se plonge naturellement dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . En effet, notons  $T' = T \cap Y$ ; il est immédiat de vérifier que  $T'$  est un arbre maximal de  $Y$ , et que  $\pi_1(\mathcal{G}, T')$  se plonge dans  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ . Maintenant,  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  s'obtient par une extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, T')$ , le long des isomorphismes associés aux arêtes de  $\mathcal{A}^1$ , sous-ensemble de  $\mathcal{A}_X^+ \cap (\mathcal{A}_X - \mathcal{A}_T)$ . Ainsi,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  se plonge naturellement dans l'extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  le long des arêtes de  $\mathcal{A}^1$ , qui elle-même se plonge naturellement dans l'extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  le long des arêtes non  $T$ -séparantes, i.e.  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

**Remarque 5 :** Ce théorème fournit implicitement une présentation pour le groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , d'un graphe de groupe décomposé  $(\mathcal{G}, X, T)$ . Si de plus les groupes de sommet sont finiment présentés, et les groupes d'arête de type fini, alors  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est finiment présenté. Plus précisément, supposons que l'on dispose d'une présentation finie de chaque groupe de sommet  $G_{s_i}$ ,

$$\forall s \in \mathcal{S}_X, \quad G_s \cong \langle X(s) \mid R(s) \rangle$$



ainsi que pour toute arête  $\alpha \in \mathcal{A}_X^+$ , d'une famille finie de mots sur la famille génératrice  $X(o(\alpha))$ , notée  $X(G_\alpha^-)$ , qui engendre le sous-groupe  $G_\alpha^- \subset G_{o(\alpha)}$ ; et que  $\forall h \in X(G_\alpha^-)$ , l'on connaisse un mot sur la famille génératrice  $X(e(\alpha))$  qui représente  $\varphi(h) \in G_\alpha^+ \subset G_{e(\alpha)}$ . Alors  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  admet la présentation finie suivante :

$$\begin{aligned} < \bigcup_{s \in \mathcal{S}_X} X(s) \cup \{t_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}_X^+ - \mathcal{A}_T^+\} \mid \bigcup_{s \in \mathcal{S}_X} R(s) \\ & \cup \{h = \varphi_\alpha(h) \mid h \in X(G_\alpha^-), \alpha \in \mathcal{A}_T^+\} \\ & \cup \{h = t_\alpha \varphi_\alpha(h) t_\alpha^{-1} \mid h \in X(G_\alpha^-), \alpha \in \mathcal{A}_X^+ - \mathcal{A}_T^+\} > \end{aligned}$$

Une telle présentation de  $(\mathcal{G}, X)$  sera appelée **présentation canonique** de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . La famille génératrice donnée par cette présentation, sera notée  $\mathcal{G}en(X)$ .

Si l'on considère un sous-graphe de groupe  $(\mathcal{G}, Y)$  de  $(\mathcal{G}, X)$ , alors  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  admet une présentation naturelle, «sous-présentation de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ » :

$$\begin{aligned} < \bigcup_{s \in \mathcal{S}_Y} X(s) \cup \{t_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}_Y^+ - \mathcal{A}_{T_Y}^+\} \mid \bigcup_{s \in \mathcal{S}_Y} R(s) \\ & \cup \{h = \varphi_\alpha(h) \mid h \in X(G_\alpha^-), \alpha \in \mathcal{A}_{T_Y}^+\} \\ & \cup \{h = t_\alpha \varphi_\alpha(h) t_\alpha^{-1} \mid h \in X(G_\alpha^-), \alpha \in \mathcal{A}_Y^+ - \mathcal{A}_{T_Y}^+\} > \end{aligned}$$

avec  $T_Y = T \cap Y$ . La famille génératrice de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  donnée par cette présentation sera notée  $\mathcal{G}en(Y)$ . En particulier, si  $Y$  est réduit à un sommet  $s$ , alors  $\mathcal{G}en(s) = X(s)$ , est famille génératrice du groupe de sommet  $G_s$ .

### 2.2.3 Groupe fondamental d'une variété Haken

Soit  $M$  une 3-variété haken, à bord torique non vide. Notons  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$  les composantes connexes de  $\partial M$ . On appelle **système périphéral** de  $\pi_1(M)$ , la donnée pour tout  $i = 1, \dots, q$ , d'un plongement  $p_i : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$  induit par l'inclusion de  $\mathcal{T}_i$  dans  $M$  (il est essentiellement déterminé par la donnée d'un chemin du point de base de  $\pi_1(M)$  au point de base de  $\pi_1(\mathcal{T}_i)$ ).

On se donne une variété Haken  $M$  vérifiant  $\chi(M) = 0$ , et une décomposition  $W$  de  $M$ . On note  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$  les composantes de  $W$ ,  $M_1, \dots, M_p$  les variétés élémentaires, et  $f_1, \dots, f_q$  les homéomorphismes associés à la décomposition. On considère aussi un système périphéral de  $\pi_1(M)$ . On note pour  $i = 1, \dots, q$ , le plongement de  $\pi_1(\mathcal{T}_i^-)$  dans  $\pi_1(M)$

$$p_i^- : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$$

et le plongement de  $\pi_1(\mathcal{T}_i^+)$  dans  $\pi_1(M)$

$$p_i^+ : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$$

et l'on note  $f_{i*}$  l'application de  $p_i^-(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$  sur  $p_i^+(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$  induite par  $f_i$ .

On construit un **graphe de groupe associé** à la décomposition  $W$  de  $M$ , de la façon suivante :

Le graphe orienté  $X$  est défini par :

$$\mathcal{S}_X = \{S_1, \dots, S_j, \dots, S_p\}$$

$$\mathcal{A}_X^+ = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_q\}$$

avec l'origine de  $a_i$ ,  $o(a_i) = S_r$  où  $\mathcal{T}_i^- \subset M_r$ , et l'extrémité de  $a_i$ ,  $e(a_i) = S_t$  où  $\mathcal{T}_i^+ \subset M_t$ .

Les groupes de sommets et les groupes d'arête sont définis par :

$$G_{S_j} = \pi_1(M_j) \quad j = 1, \dots, p$$

$$G_{a_i} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad i = 1, \dots, q$$

et les monomorphismes par

$$\phi_{a_i} = p_i^-, \quad \phi_{-a_i} = f_{a_i*} \circ p_i^-$$

et alors, avec les notations de la remarque 4 du théorème 2.2.3,  $G_{a_i}^- = p_i^-(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ ,  $G_{a_i}^+ = p_i^+(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ , et  $\varphi_{a_i} = f_{a_i*}$ . On a bien construit un graphe de groupe,  $(\mathcal{G}, X)$ . Ce graphe dépend de  $W$ , et du choix d'un système périphéral. Sa classe d'isomorphisme n'en dépend pas.

Le résultat suivant, s'obtient par une suite d'applications du théorème de Van-Kampen.

**Théorème 2.2.4** *Soit  $M$  une variété Haken, et  $W$  une décomposition. Le groupe fondamental du graphe de groupe associé  $(\mathcal{G}, X)$ , est isomorphe au groupe fondamental de  $M$ .*

**Exemple :** Considérons l'entrelacs à 3 composantes,  $L$  de  $S^3$  figurant ci-dessous :

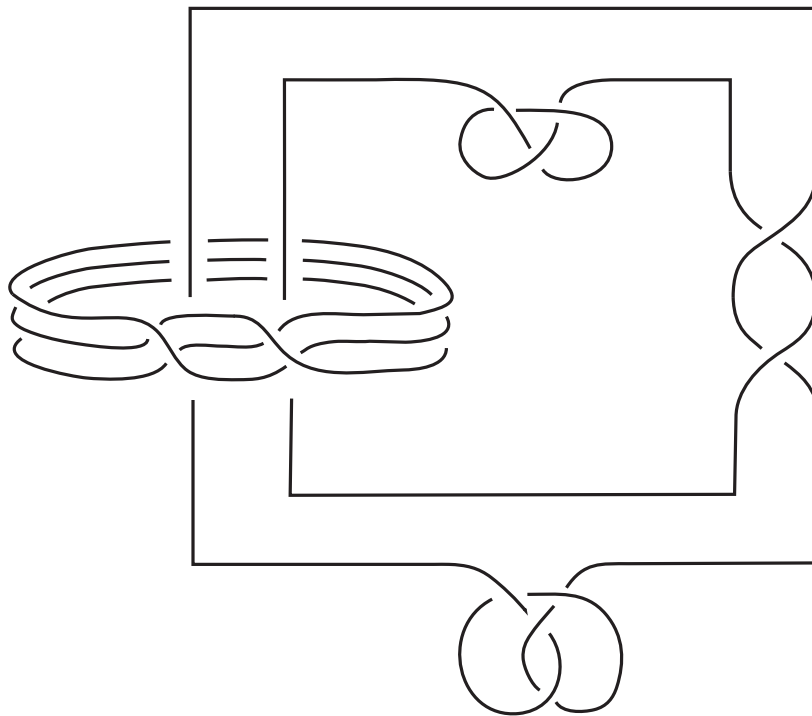


FIG. 2.2 –  $L$ 'entrelacs  $L$  de  $S^3$ .

Considérons trois tores essentiels  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$ , et  $\mathcal{T}_3$  dans le complément de  $L$ ,  $S^3 - \text{int}(N(L))$ , donnés ci-dessous.

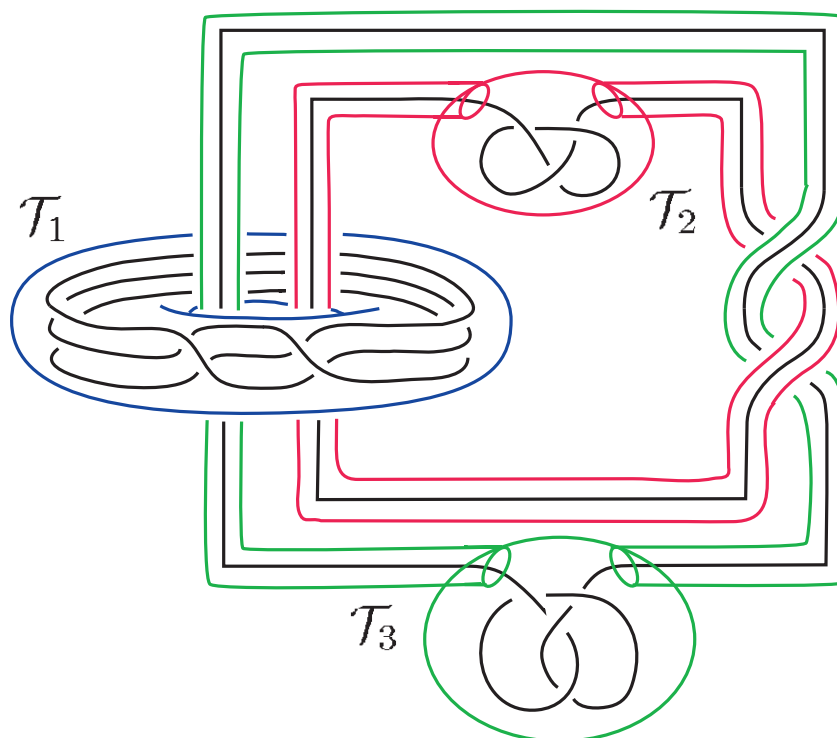


FIG. 2.3 – Les tores essentiels  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$ , et  $\mathcal{T}_3$  de  $S^3 - \text{int}(N(L))$ .

En décomposant  $S^3 - \text{int}(N)(L)$  le long de  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$ , on obtient les variétés  $N_1, N_2, N_3, N_4$  (ce sont des compléments d'entrelacs dans  $S^3$ ), ainsi que des homéomorphismes  $f_1, f_2, f_3$  associés à la décomposition.

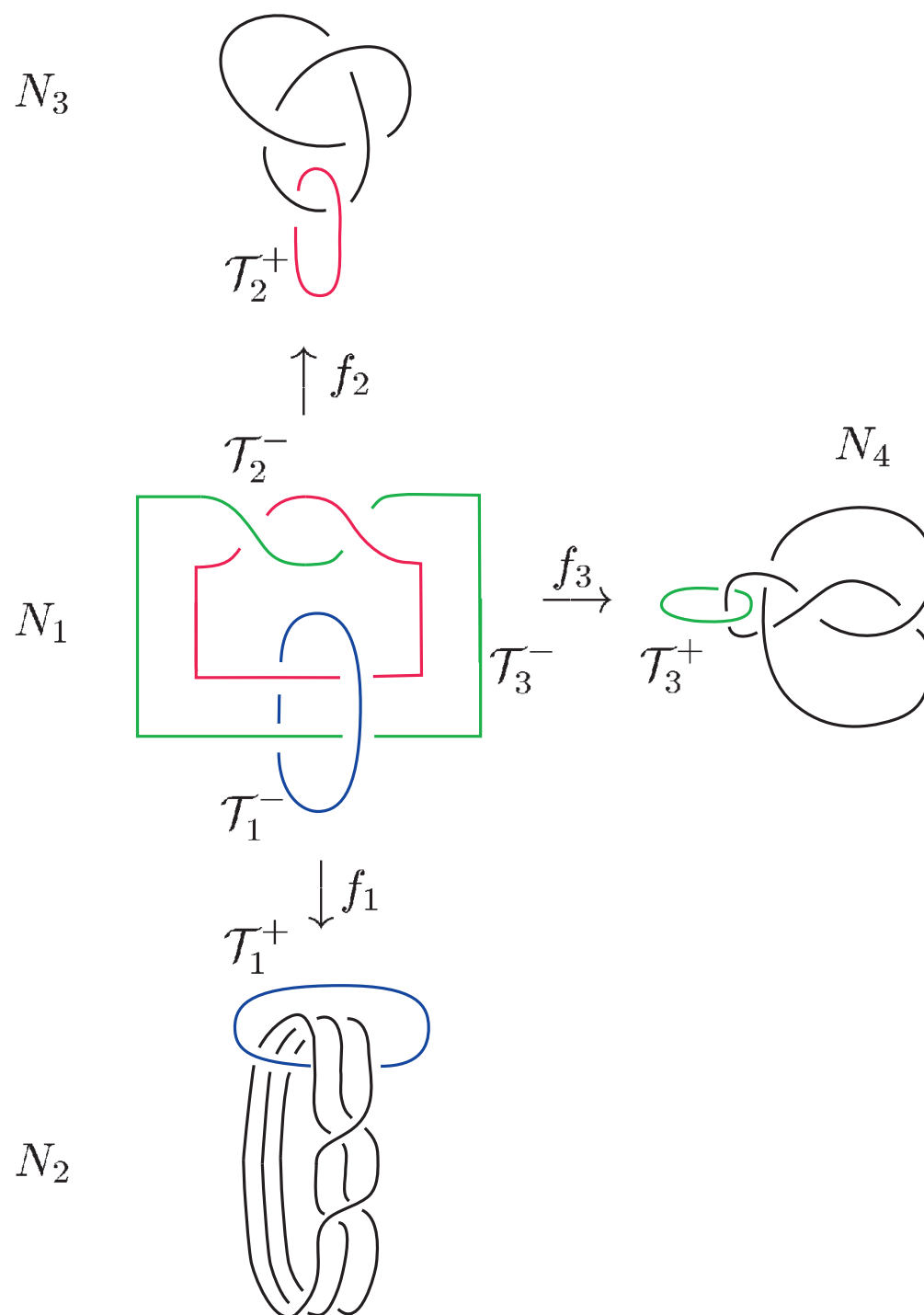


FIG. 2.4 – Les pièces élémentaires  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , et les homéomorphismes  $f_1, f_2, f_3$  associés à la décomposition.

Il est facile de voir que  $N_1$  est un fibré de Seifert ayant pour base la sphère à 3 trous, et aucune fibre exceptionnelle; que  $N_2$  est un fibré de Seifert ayant pour base la sphère à 2 trous, et une fibre exceptionnelle d'indice 3; et que  $N_3$  et  $N_4$

contiennent tous deux un tore essentiel.

On note  $\mathcal{T}_4$  le tore essentiel suivant de  $N_3$ , et on décompose  $N_3$  le long de  $\mathcal{T}_4$ , comme ci-dessous :

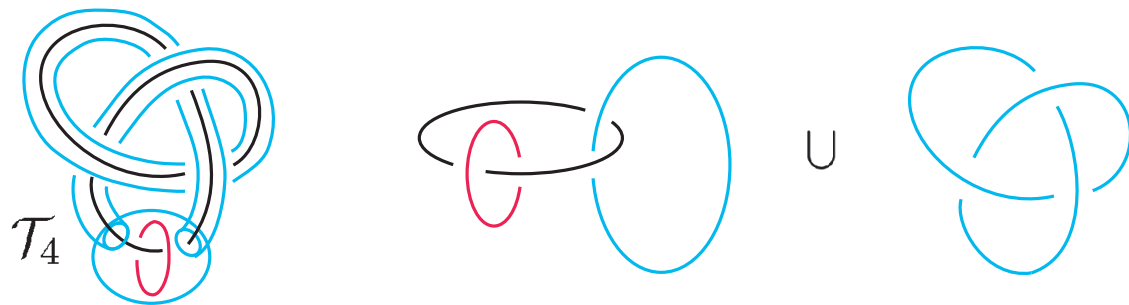


FIG. 2.5 – Le tore essentiel  $\mathcal{T}_4$  de  $M_2$  (à gauche), et les deux pièces obtenues en décomposant  $M_2$  le long de  $\mathcal{T}_4$  (à droite).

Notons aussi  $\mathcal{T}_5$  le tore essentiel suivant de  $N_4$ , et décomposons  $N_4$  le long de  $\mathcal{T}_5$ .

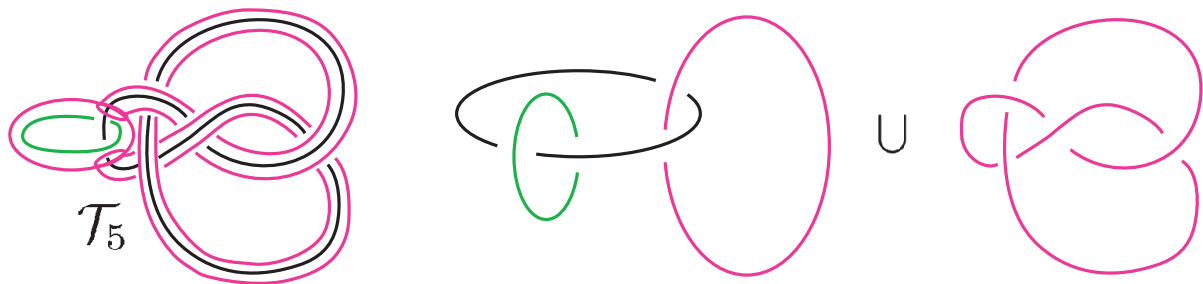


FIG. 2.6 – Le tore essentiel de  $M_3$  (à gauche) et les deux variétés obtenues en décomposant le long de  $\mathcal{T}_5$ .

Notons  $M_1 = N_1$ ,  $M_2 = N_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  les pièces obtenues en décomposant  $N_3$  le long de  $\mathcal{T}_4$  (où  $M_4$  est le trèfle), et  $M_5, M_6$  les pièces obtenues en décomposant  $N_4$  le long de  $\mathcal{T}_5$  (où  $M_6$  est le noeud de huit). Les pièces  $M_3$  et  $M_5$  sont homéomorphes au  $S^1$ -fibré trivial ayant pour base la sphère à trois trous. De plus le complément du trèfle est un fibré de Seifert, et le noeud de huit est connu pour avoir un complément hyperbolique (de volume fini). Ainsi, la surface  $W = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3 \cup \mathcal{T}_4 \cup \mathcal{T}_5$  est une décomposition du complément de l'entrelacs  $L$ . En utilisant la classification des compléments d'entrelacs admettant une fibration de Seifert ([BM]), on vérifie immédiatement que  $W$  est minimale. Il est facile de se donner des homéomorphismes  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , et  $f_5$  associés à la décomposition.

Ainsi, on obtient en décomposant  $S^3 - \text{int}(N(L))$  le long de  $W$  :

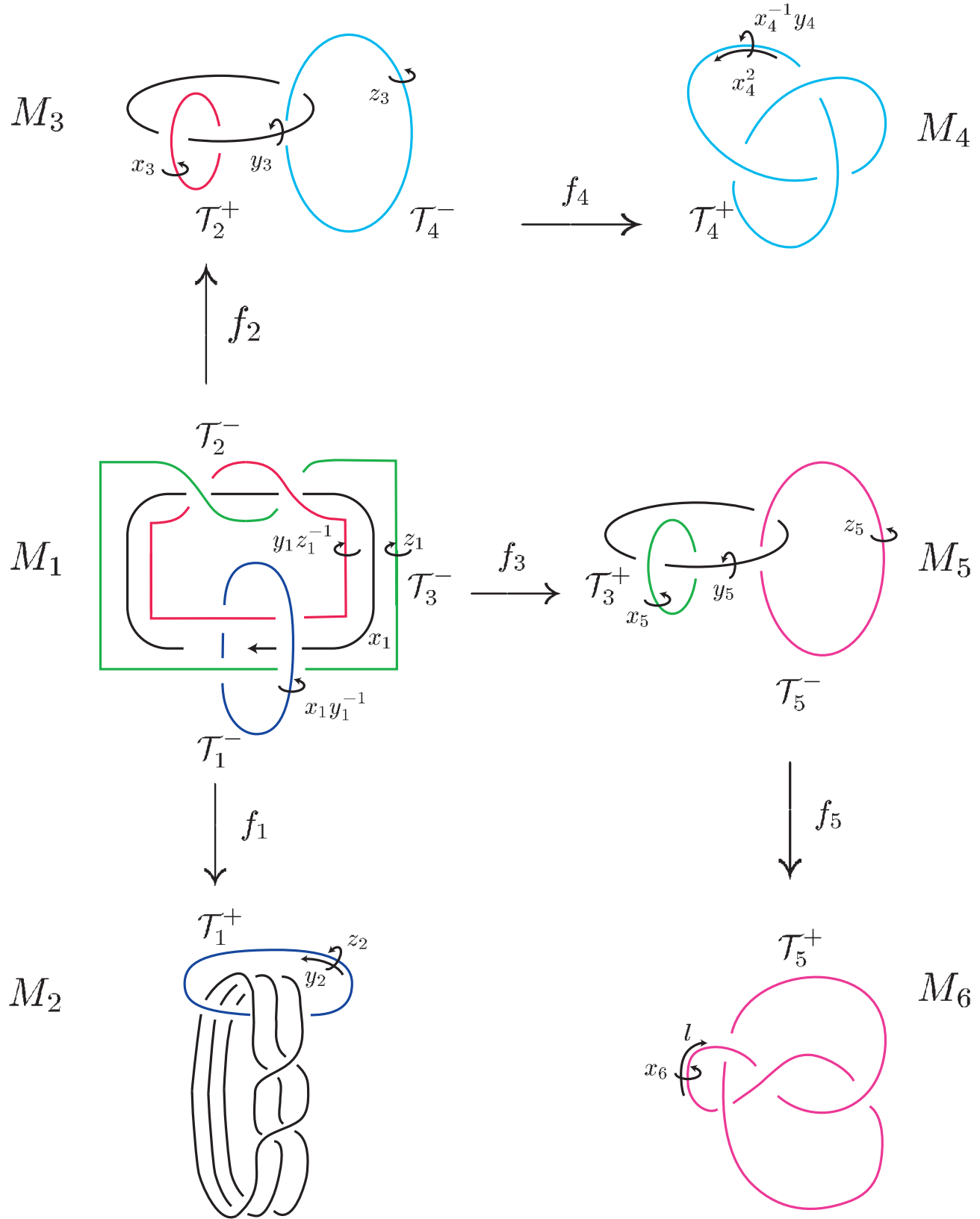


FIG. 2.7 – Décomposition de  $S^3 - \text{int}(N(L))$  le long de  $W$ .

On peut remarquer, bien que cela soit anecdotique, que  $M_1$  et  $M_3$  sont homéomorphes, bien qu'ils soient des compléments d'entrelacs de types distincts (comparer avec le théorème de Gordon-Luecke dans le cas d'un noeud).

On construit alors le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ , en considérant tout d'abord le graphe orienté  $X$  : puis les groupes de sommets :

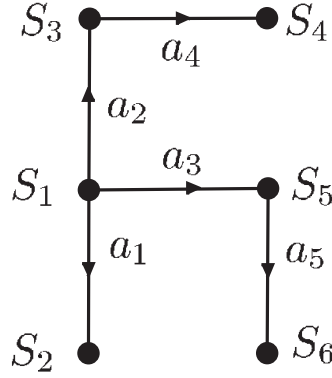


FIG. 2.8 – Le graphe orienté  $X$ .

$$G_{S_1} = \pi_1(M_1) \cong \langle x_1, y_1, z_1 \mid [x_1, y_1] = [x_1, z_1] = 1 \rangle \cong F_2 \times \mathbb{Z}$$

$$G_{S_2} = \pi_1(M_2) \cong \langle x_2, y_2, z_2 \mid x_2^3 = y_2^2, [y_2, z_2] = 1 \rangle$$

$$G_{S_3} = \pi_1(M_3) \cong \langle x_3, y_3, z_3 \mid [x_3, y_3] = [y_3, z_3] = 1 \rangle \cong F_2 \times \mathbb{Z}$$

$$G_{S_4} = \pi_1(M_4) \cong \langle x_4, y_4 \mid x_4^2 = y_4^3 \rangle$$

$$G_{S_5} = \pi_1(M_5) \cong \langle x_5, y_5, z_5 \mid [x_5, y_5] = [y_5, z_5] = 1 \rangle \cong F_2 \times \mathbb{Z}$$

$$G_{S_6} = \pi_1(M_6) \cong \langle x_6, y_6 \mid x_6 y_6^2 x_6^2 y_6 x_6 y_6^{-1} x_6^{-2} y_6^{-1} = 1 \rangle$$

Il est alors nécessaire de choisir un plongement des groupes des composantes  $\mathcal{T}_i^\pm$  pour obtenir les plongements des groupes d'arêtes dans les groupes de sommet ; et les isomorphismes  $\varphi_{a_j}$  pour toute arête  $a_j$  sont alors déterminés par les classes d'isotopie des homéomorphismes  $f_j$ , pour  $j$  variant de 1 jusqu'à 5. Le calcul fournit :

$$G_{a_1}^- = \pi_1(\mathcal{T}_1^-) = \langle x_1 y_1^{-1}, y_1 \rangle_{G_{S_1}} \subset G_{S_1}$$

$$G_{a_1}^+ = \pi_1(\mathcal{T}_1^+) = \langle z_2, y_2 \rangle_{G_{S_2}} \subset G_{S_2}$$

$$\varphi_{a_1}(x_1 y_1^{-1}) = y_2 \quad \varphi_{a_1}(y_1) = z_2$$

$$G_{a_2}^- = \pi_1(\mathcal{T}_2^-) = \langle y_1 z_1^{-1}, x_1 \rangle_{G_{S_1}} \subset G_{S_1}$$

$$G_{a_2}^+ = \pi_1(\mathcal{T}_2^+) = \langle x_3, y_3 \rangle_{G_{S_3}} \subset G_{S_3}$$

$$\varphi_{a_2}(y_1 z_1^{-1}) = y_3 \quad \varphi_{a_2}(x_1) = x_3$$

$$G_{a_3}^- = \pi_1(\mathcal{T}_3^-) = \langle z_1, x_1 \rangle_{G_{S_1}} \subset G_{S_1}$$

$$G_{a_3}^+ = \pi_1(\mathcal{T}_3^+) = \langle x_5, y_5 \rangle_{G_{S_5}} \subset G_{S_5}$$

$$\varphi_{a_3}(z_1) = y_5 \quad \varphi_{a_3}(x_1) = x_5$$

$$\begin{aligned}
G_{a_4}^- &= \pi_1(\mathcal{T}_4^-) = \langle z_3, y_3 \rangle_{G_{S_3}} \subset G_{S_3} \\
G_{a_4}^+ &= \pi_1(\mathcal{T}_4^+) = \langle x_4^{-1}y_4, x_4^2 \rangle_{G_{S_4}} \subset G_{S_4} \\
\varphi_{a_4}(z_3) &= x_4^2 \quad \varphi_{a_4}(y_3) = x_4^{-1}y_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{a_5}^- &= \pi_1(\mathcal{T}_5^-) = \langle z_5, y_5 \rangle_{G_{S_5}} \subset G_{S_5} \\
G_{a_5}^+ &= \pi_1(\mathcal{T}_5^+) = \langle x_6, l = x_6y_6x_6y_6^{-1}x_6^{-1}y_6^2x_6^2y_6x_6^{-1} \rangle_{G_{S_6}} \subset G_{S_6} \\
\varphi_{a_5}(z_5) &= l \quad \varphi_{a_5}(y_5) = x_6
\end{aligned}$$

Ceci nous suffit à définir le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ . Il dépend clairement d'un choix des plongements des composantes au bord. Son groupe fondamental, cependant, n'en dépend pas. C'est aussi le groupe fondamental du complément de  $L$  dans  $S^3$ . Le théorème 2.2.3 nous permet de fournir la présentation :

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, x_5, y_5, z_5, x_6, y_6 \mid \\
&\quad [x_1, y_1] = [x_1, z_1] = [y_2, z_2] = [x_3, y_3] = [y_3, z_3] = [x_5, y_5] = [y_5, z_5] = 1, \\
&\quad x_2^3 = y_2^2, \quad x_4^2 = y_4^3, \quad x_6y_6^2x_6^2y_6x_6y_6^{-1}x_6^{-2}y_6^{-1} = 1, \\
&\quad x_1y_1^{-1} = y_2, \quad y_1 = z_2, \quad y_1z_1^{-1} = y_3, \quad x_1 = x_3, \\
&\quad z_1 = y_5, \quad x_1 = x_5, \quad z_3 = x_4^{-1}y_4, \quad y_3 = x_4^2, \\
&\quad z_5 = x_6, \quad y_5 = x_6y_6x_6y_6^{-1}x_6^{-1}y_6^2x_6^2y_6x_6^{-1} \rangle
\end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit,  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  sont des espaces fibrés de Seifert. Dans leur groupes fondamentaux respectifs, la classe d'une fibre régulière est respectivement :  $x_1, y_2^2, y_3, x_4^2$  et  $y_5$  (ils engendrent le centre). Remarquons que les isomorphismes  $\varphi_a$  associés n'envoient pas la classe d'une fibre régulière, sur la classe d'une fibre régulière, ce qui est en accord avec le fait déjà observé, que la décomposition  $W$  soit minimale.



## Chapitre 3

# Extension HNN, amalgame, et graphe de groupe

Le but de chapitre est de généraliser au cas du groupe fondamental d'un graphe de groupe, les théorèmes de conjugaison et de commutativité dans un amalgame ou une extension HNN. Dans la première section, nous énonçons ces résultats pour un amalgame et une extension HNN. On peut trouver une démonstration pour le cas d'un amalgame dans [MKS]; quant au cas d'une extension HNN, il sera démontré dans la dernière section de ce chapitre.

Dans la deuxième section nous établissons ces résultats pour le groupe d'un graphe de groupe (théorèmes 3.2.1, 3.2.2). Nous aurons besoin pour cela de définir les notions de trajet et de circuit, dans un graphe de groupe.

### 3.1 Extension HNN et amalgame

Nous rappelons dans cette section les théorèmes de conjugaison et de commutativité dans un amalgame ou une extension HNN. Dans le cas d'un amalgame nous ne faisons qu'énoncer ces résultats, renvoyant le lecteur désireux d'une preuve à l'ouvrage de Magnus, Karrass, et Solitar [MKS]. Le cas d'une extension HNN sera quant à lui démontré dans la dernière section de ce chapitre (§3.3). Nous pouvons cependant aiguiller le lecteur sur l'ouvrage de Lyndon et Schupp, pour une preuve d'une forme moins explicite du théorème de conjugaison (lemme de Collins, [LS], chap. IV, théorème 2.5).

#### 3.1.1 Produit amalgamé

Nous considérerons tout au long de ce paragraphe, un groupe  $\Gamma$ , produit amalgamé des groupes  $A$  et  $B$  le long du sous-groupe  $C$ .

**Conjugaison dans un amalgame.** Soit  $\omega$  un élément de  $\Gamma$ , donné par une écriture sous forme réduite  $\omega \equiv \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ . On dira que  $\omega$  est **cycliquement réduit** si  $\omega_1$  et  $\omega_n$  sont dans des facteurs différents. Clairement cette définition ne dépend pas du choix d'une forme réduite de  $\omega$ , ainsi on pourra parler d'élément cycliquement

réduit. De plus, il est clair que tous les conjugués cycliques  $\omega_r \cdots \omega_n \omega_1 \cdots \omega_{r-1}$ , d'un élément cycliquement réduit, sont aussi cycliquement réduits.

Pour traiter le problème de la conjugaison dans un produit amalgamé, on dispose du résultat suivant, qui constitue le théorème 4.6 de [MKS].

**Théorème 3.1.1** *Soit  $\Gamma = A *_C B$ . Alors tout élément  $\gamma \in \Gamma$  est conjugué à un élément cycliquement réduit. De plus si  $\gamma$  est un élément cycliquement réduit, alors :*

- (i) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $c \in C$ , par  $h \in \Gamma$ , de forme réduite  $h = h_1 h_2 \cdots h_{n+1}$  avec  $n \geq 0$ , alors  $\gamma$  est dans un des facteurs, et il existe une suite finie  $(c_0, c_1, \dots, c_n, \gamma)$ , avec  $c_0 = c$ , et où  $\forall i = 0, \dots, n$ ,  $c_i \in C$ , et  $h_{i+1}$  conjugue  $c_i$  en  $c_{i+1}$  (en posant  $c_{n+1} = \gamma$ ).*
- (ii) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $\gamma'$ , qui est dans un des facteurs, mais n'est pas conjugué à un élément de  $C$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dans un même facteur, et conjugués dans ce facteur.*
- (iii) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément cycliquement réduit, d'écriture sous forme réduite  $p_1 p_2 \cdots p_r$  où  $r > 1$ , alors  $\gamma$  peut être obtenu en conjuguant un conjugué cyclique  $p_i \cdots p_r p_1 \cdots p_{i-1}$  de  $p_1 p_2 \cdots p_r$  par un élément de  $C$ .*

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1.1 (Théorème de conjugaison dans un amalgame)** *Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$ , deux éléments de  $\Gamma = A *_C B$ , cycliquement réduits, conjugués par un élément  $h$  de  $\Gamma$ . Alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont même longueur, et de plus :*

- (i) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément de  $C$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont de longueur 1, et si  $h$  s'écrit sous forme réduite  $h = h_0 h_1 \cdots h_{n+1}$ , il existe une suite finie  $c_0, c_1, \dots, c_n$  d'éléments de  $C$ , telle que,  $c_0$  est conjugué à  $\gamma$  par  $h_0^{-1}$  dans un facteur,  $c_n$  est conjugué à  $\gamma'$  dans un facteur par  $h_{n+1}$ , et  $\forall i = 0, \dots, n-1$ ,  $c_i$  et  $c_{i+1}$  sont conjugués dans un facteur par  $h_{i+1}$ .*
- (ii) *Si  $\gamma$  est dans un des facteurs et n'est pas conjugué à un élément de  $C$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dans le même facteur, et conjugués par  $h$  dans ce facteur.*
- (iii) *Si  $\gamma$  n'est pas dans un des facteurs, alors  $\gamma$  s'obtient en conjuguant un conjugué cyclique de  $\gamma'$  par un élément de  $C$ .*

**Commutativité dans un amalgame.** Le théorème qui suit, caractérise les éléments qui commutent dans un produit amalgamé. Ses parties (i'), (ii) et (iii) constituent le théorème 4.5 de [MKS], auquel nous renvoyons le lecteur pour une preuve dans ces cas. Quant à la partie (i), elle s'obtient immédiatement avec le théorème de conjugaison, dès que l'on a remarqué que  $x$  et  $y$  commutent ssi  $y$  conjugue  $x$  en lui-même.

**Théorème 3.1.2 (Théorème de commutativité dans un amalgame)** *Soient  $\Gamma = A *_C B$ , et deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\Gamma$  qui commutent. Alors :*

- (i) *Si  $x$  est dans  $C$ , et  $y$  s'écrit sous forme réduite,  $y_1 y_2 \cdots y_n$ , alors il existe une suite finie d'éléments  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$  de  $C$ , avec  $c_0 = c_n = x$ , et  $\forall i = 0, \dots, n-1$ ,  $y_{i+1}$  conjugue  $c_i$  en  $c_{i+1}$  dans un des facteurs.*

- (i')  $x$  ou  $y$  est dans un conjugué de  $C$ .
- (ii) Si ni  $x$  ni  $y$  n'est dans un conjugué de  $C$ , et  $x$  est dans le conjugué d'un facteur, alors  $y$  est dans le même conjugué du même facteur.
- (iii) Si ni  $x$  ni  $y$  n'est dans le conjugué d'un facteur, alors  $x = ghg^{-1}.W^j$ , et  $y = gh'g^{-1}.W^k$ , où  $g, W \in G$ , et  $h, h' \in C$ , et  $ghg^{-1}, gh'g^{-1}$ , et  $W$ , commutent deux à deux.

### 3.1.2 Extension HNN

Nous considérons dans ce paragraphe, le groupe  $\Gamma$ , extension HNN de  $A$  le long de l'isomorphisme  $\phi : C_{-1} \longrightarrow C_{+1}$ .

**Conjugaison dans une extension HNN.** Soit  $\omega$  un élément de  $G$ , qui s'écrit sous forme réduite  $\omega \equiv \omega_1 t^{\varepsilon_1} \cdots t^{\varepsilon_n} \omega_{n+1}$ . On dit que  $\omega$  est **cycliquement réduit** si soit  $|\omega| = 1$ , (i.e.  $\omega \in A$ ), soit  $\omega_{n+1} = 1$ , et dans ce dernier cas, soit  $|\omega| = 2$ , (i.e.  $w = w_1 t^{\varepsilon_1}$ ), soit  $|\omega| > 2$ , et  $t^{\varepsilon_n} \omega_1 t^{\varepsilon_1}$  n'est pas un pinch. Il est clair que cette condition ne dépend pas du choix d'une forme normale réduite de  $\omega$ . Aussi on pourra parler d'élément cycliquement réduit de  $\Gamma$ .

On dispose d'un théorème de conjugaison dans une extension HNN, dû à D.J. Collins, (cf. théorème 2.5, chap. IV [LS]), nommé le lemme de Collins. La version que nous donnons est plus explicite que la version originale, et nous en fournirons une preuve dans la dernière section de ce chapitre.

**Théorème 3.1.3** *Soit  $\Gamma = A *_\phi$ . Alors tout élément  $\gamma \in \Gamma$  est conjugué à un élément cycliquement réduit. De plus si  $\gamma$  est cycliquement réduit, alors :*

- (i) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $c \in C_{+1} \cup C_{-1}$  par l'élément  $h$  de forme réduite  $h = h_1 t^{\varepsilon_1} h_2 \cdots t^{\varepsilon_p} h_{p+1}$ , alors  $\gamma$  est dans  $A$ , et il existe une suite finie  $(c_0, c_1, \dots, c_{2p})$  d'éléments de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , telle que  $c_{2p} = c$ ,  $\gamma = h_1.c_0.h_1^{-1}$ , et pour  $i = 0, \dots, p-1$ ,*

$$\begin{aligned} c_{2i+1} &= h_{i+2}.c_{2i+2}.h_{i+2}^{-1} \\ c_{2i} &= t^{\varepsilon_{(i+1)}}.c_{2i+1}.t^{-\varepsilon_{(i+1)}} \end{aligned}$$

- (ii) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $\gamma' \in A$ , mais n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , alors  $\gamma$  est dans  $A$ , et  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont conjugués dans  $A$ .*
- (iii) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $\gamma'$ , cycliquement réduit, d'écriture sous forme réduite,  $u_1 t^{\mu_1} \cdots u_m t^{\mu_m}$  avec  $m \geq 1$ , alors  $\gamma$  peut-être obtenu en conjuguant un conjugué cyclique de  $\gamma'$ ,  $u_{r+1} t^{\mu_{r+1}} \cdots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{\mu_1} \cdots u_r t^{\mu_r}$  par un élément de  $C_{\mu_r}$ .*

Et l'on obtient alors immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1.2 (Théorème de conjugaison dans une extension HNN)** *Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux éléments cycliquement réduits de  $\Gamma = A *_\phi$ , conjugués par  $h \in \Gamma$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont même longueur, et de plus :*

- (i) *Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $c$  de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dans  $A$ , et si  $h$  s'écrit sous la forme réduite  $h = h_1 t^{\varepsilon_1} \cdots t^{\varepsilon_p} h_{p+1}$ , il existe une suite finie*

$(c_0, c_1, \dots, c_{2p-1})$  d'éléments de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , telle que  $\gamma = h_1.c_0.h_1^{-1}$ , et pour  $i = 0, \dots, p-1$ , en posant  $c_{2p} = \gamma'$ ,

$$\begin{aligned} c_{2i+1} &= h_{i+2}.c_{2i+2}.h_{i+2}^{-1} \\ c_{2i} &= t^{\varepsilon(i+1)}.c_{2i+1}.t^{-\varepsilon(i+1)} \end{aligned}$$

- (ii) Si  $\gamma$  est dans  $A$ , mais n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , alors  $\gamma'$  est dans  $A$  et  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont conjugués par  $h$  dans  $A$ .
- (iii) Si  $\gamma$  n'est pas dans  $A$ ,  $\gamma = u_1 t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m}$ , avec  $m \geq 1$  alors  $c$  s'obtient en conjuguant un conjugué cyclique  $v_r t^{\mu_r} \dots v_m t^{\mu_m} v_1 t^1 \dots v_{r-1} t^{\mu_{r-1}}$  de  $\gamma'$  par un élément  $\alpha$  de  $C_{\mu_m}$ .

**Commutativité dans une extension HNN.** Pour une démonstration du théorème suivant, nous renvoyons encore le lecteur à la dernière section de ce chapitre.

**Théorème 3.1.4 (Théorème de commutativité dans une extension HNN)**

Soient  $G = A *_\phi$ , où  $\phi : C_{-1} \longrightarrow C_{+1}$ , et  $x$  et  $y$ , deux éléments de  $G$  qui commutent. Alors :

- (i) Si  $x \in C_{+1} \cup C_{-1}$ , et  $y$  s'écrit sous forme réduite,  $y = y_1 t^{\varepsilon_1} y_2 \dots y_n t^{\varepsilon_n} y_{n+1}$ , alors il existe une suite d'éléments  $(c_0, c_1, \dots, c_{2n+1})$  de  $C_{+1} \cup C_{-1}$  où  $c_0 = c_{2n+1} = x$ , et  $c_i$  et  $c_{i+1}$ , sont conjugués, par  $y_{\frac{i}{2}+1}$  si  $i$  est pair, et par  $t^{\varepsilon(\frac{i-1}{2}+1)}$ , si  $i$  est impair.
- (i')  $x$  ou  $y$  est conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ .
- (ii) Si  $x$  est dans un conjugué de  $A$  et n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , alors  $y$  est dans le même conjugué de  $A$ .
- (iii) Si ni  $x$  ni  $y$  n'est dans un conjugué de  $A$ , alors  $x = gcg^{-1}W^j$  et  $y = gc'g^{-1}W^k$ , où  $g, W \in G$ ,  $c, c' \in C_{+1}$  (respectivement  $c, c' \in C_{-1}$ ), et  $gcg^{-1}$ ,  $gc'g^{-1}$ , et  $W$  commutent deux à deux.

## 3.2 Graphes de groupe

C'est dans cette section que nous établissons des théorèmes généraux concernant le groupe fondamental d'un graphe de groupe ; principalement les théorèmes de commutativité (théorème 3.2.1), et de conjugaison (théorème 3.2.2), que nous traitons respectivement dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3.

Un autre résultat essentiel de cette section est la proposition 3.2.3 (§3.2.4), qui nous permet de réduire le problème de la conjugaison dans un groupe  $G$ , au même problème dans son «double»  $2G$  ; rappelons que cette propriété a déjà été employée dans le cas où  $G$  est le groupe fondamental d'une 3-variété  $\partial$ -irréductible à bord non vide, et  $2G$  est le groupe fondamental du double de  $M$  le long de son bord (cf. proposition 1.5.2).

L'approche démonstrative que nous employons est inductive. Si  $(\mathcal{G}, X)$  est un graphe de groupe, décomposer  $X$  le long d'une de ses arêtes, décompose  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  en extension HNN ou en amalgame de sous-graphes(s) de groupe. Les théorèmes de la section précédente servent alors à la fois de conditions initiales, et de conditions de récurrence.

Une généralisation des parties (i) et (ii) de ces théorèmes, fait apparaître une notion naturelle, que nous formalisons dans le paragraphe 3.2.1, en circuit et trajet. Lorsque  $u$  et  $v$  sont des éléments des sous-groupes de sommet  $G_{s_1}, G_{s_2}$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ ,  $u \sim v$  par  $h$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  si et seulement si il existe un trajet de  $u$  à  $v$  de label  $h$  (proposition 3.2.2) ; l'élément  $h' \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$  commute avec  $u$  si et seulement si  $h'$  est le label d'un circuit en  $u$  (corollaire 3.2.2). Dans le contexte qui est le notre, c'est à dire pour le graphe de groupe associé à la décomposition JSJ d'une variété Haken  $M$ , il est très simple de visualiser géométriquement ce qu'est un trajet. Si  $u$  et  $v$  sont conjugués, alors ils cobordent un anneau singulier  $A$  de  $M$ . Puisque des lacet représentant  $u$  et  $v$  sont contenus dans des pièces élémentaires,  $A$  peut être mis en position générale, de façon à ce que son intersection avec une décomposition JSJ de  $M$  soit constituée de courbes fermées. Ainsi  $A$  se décompose en une suite d'anneaux contenus dans des pièces élémentaires, et recollés sur leurs bords. A chacun des anneaux obtenus correspond une conjugaison dans un groupe de sommet. Un trajet est une suite de conjugaison dans des sous-groupes de sommet, qui donne une conjugaison dans  $\pi_1(M)$ , de la même façon que le recollement des anneaux sur leurs bords redonne l'anneau  $A$ . Un circuit admet la même interprétation, en considérant un tore au lieu d'un anneau. Les résultats du paragraphe 3.2.1 seront essentiels tout au long de cette section, ainsi que durant le chapitre 6.

Nous mettons en évidence dans le dernier paragraphe de cette section (§3.2.5), comment, dans un sens que nous expliquerons, la complexité des circuits contribue à la complexité algébrique du groupe fondamental d'un graphe de groupe. Ce paragraphe a pour but essentiel d'introduire à une approche qui sera poursuivie de manière plus fructueuse dans le chapitre 6.

Nous aurions peut-être pu adopter un autre point de vue. Le groupe fondamental d'un graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  agit sans inversion sur un graphe infini  $Y$  (appelé arbre de Bass-Serre). Les groupes de sommet de  $(\mathcal{G}, X)$  sont les stabilisateurs des sommets de  $Y$ , et les groupes d'arête les stabilisateurs des arêtes de  $Y$ . Le quotient du graphe

$Y$  sous cette action est  $X$ . Il serait intéressant de voir comment se transcrivent les résultats de cette section dans cette terminologie — la théorie de Bass-Serre — ne serait-ce que pour les rendre plus facilement communicables.

### 3.2.1 Trajets et circuits

**Définition III.1.** Soit  $(\mathcal{G}, X, T)$  un graphe de groupe décomposé. Soient  $s_o$  et  $s_e$  des sommets de  $X$ , et les éléments  $u \in G_{s_o}$ ,  $v \in G_{s_e}$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Un **trajet** de  $u$  à  $v$ , d'origine  $s_o$  et d'extrémité  $s_e$ , est la donnée de :

- a) Un chemin de  $X$ , d'origine  $s_o$  et d'extrémité  $s_e$ ,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

avec  $n \geq 0$ . On note  $s_0 = s_o, s_n = s_e$ , et si  $n \geq 2$ , pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $s_i = e(a_i)$ .

- b) Une suite

$$(c_1^-, c_1^+, c_2^-, c_2^+, \dots, c_n^-, c_n^+)$$

avec  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $c_i^- \in G_{a_i}^-$ ,  $c_i^+ \in G_{a_i}^+$ , et  $c_i^+ = \varphi_{a_i}(c_i^-)$ .

- c) Une suite

$$(h_0, h_1, \dots, h_n)$$

avec soit  $n = 0$  et  $u = h_0 v h_0^{-1}$  dans  $G_{s_0}$  ; soit  $\forall i = 0, \dots, n$ ,  $h_i \in G_{s_i}$ , et

$$u = h_0 c_1^- h_0^{-1} \quad \text{dans } G_{s_0}$$

$$c_n^+ = h_n v h_n^{-1} \quad \text{dans } G_{s_n}$$

et si  $n \geq 2$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ ,

$$c_i^+ = h_i c_{i+1}^- h_i^{-1} \quad \text{dans } G_{s_i}$$

On symbolisera la donnée d'un tel trajet, par la notation suivante :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a_1} c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{h_i}{\circlearrowleft} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} c_{n-1}^+ \underset{h_{n-1}}{\circlearrowleft} c_n^- \xrightarrow{a_n} c_n^+ \underset{h_n}{\circlearrowleft} v$$

Si  $n = 0$ , on parlera du trajet **trivial**, que l'on notera :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} v$$

Si  $h_i \in G_{s_i}$  est l'élément neutre, on notera

$$\dots c_i^+ = c_{i+1}^- \dots$$

au lieu de

$$\dots c_i^+ \underset{1}{\circlearrowleft} c_{i+1}^- \dots$$

**Définition III.2.** Si le trajet  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a_1} c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{h_i}{\circlearrowleft} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} c_{n-1}^+ \underset{h_{n-1}}{\circlearrowleft} c_n^- \xrightarrow{a_n} c_n^+ \underset{h_n}{\circlearrowleft} v$$

on appelle **label** du trajet  $\mathcal{C}$ , l'élément  $h \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$ , que l'on pourra noter  $\text{label}(\mathcal{C})$ , défini par

$$\text{label}(\mathcal{C}) = h = h_0 t_{a_1} h_1 t_{a_2} \cdots t_{a_n} h_n$$

pour la présentation donnée par le théorème 2.2.3 (rappelons que si  $a$  est une arête  $T$ -séparante,  $t_a = t_{-a} = 1$ ). Il est clair, qu'alors

$$u = h v h^{-1} \quad \text{dans } \pi_1(\mathcal{G}, X)$$

**Définition III.3.** Un **circuit** en  $u$  d'origine  $s_o$ , est un trajet pour lequel  $s_o = s_e$ , de  $u$  à  $u$ . Si  $h$  est l'élément associé à un circuit en  $u$ , alors

$$[u, h] = 1 \quad \text{dans } \pi_1(\mathcal{G}, X)$$

Un **circuit trivial** en  $u$ , est un circuit de la forme :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} u$$

**Définition III.4.** Considérons un trajet  $\mathcal{T}_1$  de  $u$  à  $v$ , d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_2$ .

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{h_i}{\circlearrowleft} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \underset{h_n}{\circlearrowleft} v$$

Notons  $\mathcal{T}_1^{-1}$  le trajet ainsi défini :

$$v \underset{h_n^{-1}}{\circlearrowleft} c_n^+ \xrightarrow{-a_n} \cdots \xrightarrow{-a_{i+1}} c_{i+1}^- \underset{h_i^{-1}}{\circlearrowleft} c_i^+ \xrightarrow{-a_i} \cdots \xrightarrow{-a_1} c_1^- \underset{h_0^{-1}}{\circlearrowleft} u$$

C'est un trajet de  $v$  à  $u$ , d'origine  $s_2$  et d'extrémité  $s_1$ . Si  $h_1$  est le label de  $\mathcal{T}_1$ , alors  $\mathcal{T}_1^{-1}$  a pour label  $h_1^{-1}$ . On dira que le trajet  $\mathcal{T}_1^{-1}$  est **l'inverse** de  $\mathcal{T}_1$ . Considérons un trajet  $\mathcal{T}_2$  d'origine  $s_2$  et d'extrémité  $s_3$ , de  $v$  à  $w$  :

$$v \underset{k_0}{\circlearrowleft} d_1^- \xrightarrow{b_1} \cdots \xrightarrow{b_j} d_j^+ \underset{k_j}{\circlearrowleft} d_{j+1}^- \xrightarrow{b_{j+1}} \cdots \xrightarrow{b_m} d_m^+ \underset{k_m}{\circlearrowleft} w$$

Sous ces hypothèses, on définit le **produit** de  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , noté  $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$ , par

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \underset{h_n k_0}{\circlearrowleft} d_1^- \xrightarrow{b_1} \cdots \xrightarrow{b_j} \cdots \xrightarrow{b_m} d_m^+ \underset{k_m}{\circlearrowleft} w$$

C'est un trajet de  $u$  à  $w$ , d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_3$ . Si  $h_2$  est le label de  $\mathcal{T}_2$ , alors le label de  $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$  est le produit  $h_1 h_2$ . Il est facile de vérifier que lorsqu'il est défini, ce produit est associatif.

**Définition III.5.** Considérons un élément non trivial  $u$  dans un sous-groupe de sommet  $G_s$ , et notons  $\mathcal{C}(u,s)$  l'ensemble des labels des circuits en  $u$  d'origine  $s$ . Remarquons que le produit de deux circuits en  $u$  d'origine  $s$  est toujours défini, et que le produit et l'inverse de deux circuits en  $u$  d'origine  $s$ , est encore un circuit en  $u$  d'origine  $s$ . Ainsi  $\mathcal{C}(u,s)$  muni de l'opération de  $\pi_1(\mathcal{G},X)$ , forme un sous-groupe de  $\pi_1(\mathcal{G},X)$ .

Les premières propositions que nous démontrons, ont pour but de ne plus avoir à parler de l'origine et de l'extrémité d'un trajet.

**Proposition 3.2.1** *Soit  $(\mathcal{G},X,T)$  un graphe de groupe décomposé. Soient  $s_1, s_2$  deux sommets distincts de  $X$ , et  $u$  un élément de  $\pi_1(\mathcal{G},X)$ .*

*Alors  $u \in G_{s_1} \cap G_{s_2}$ , si et seulement si il existe un trajet dans  $\pi_1(\mathcal{G},X)$ , de  $u$  à  $u$ , d'origine  $s_1$ , et d'extrémité  $s_2$ , de la forme*

$$u = c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ = c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ = u$$

*avec pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i \in \mathcal{A}(T)$  (et donc le label de ce trajet est l'élément neutre).*

**Démonstration** La réciproque étant triviale, nous démontrons l'implication directe.

Remarquons qu'un trajet dans un sous-graphe de groupe de  $(\mathcal{G},X)$  est aussi naturellement un trajet de  $(\mathcal{G},X)$ , ayant même label. Ainsi, puisque  $G_{s_1}, G_{s_2} \subset \pi_1(\mathcal{G},T) \subset \pi_1(\mathcal{G},X)$ , il est suffisant de montrer la propriété dans le sous-graphe  $(\mathcal{G},T)$  de  $(\mathcal{G},X)$ , muni de la décomposition induite. Considérons dans  $T$  l'unique chemin réduit  $(a_1, \dots, a_n)$  d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_2$ , et notons  $C$  le sous-graphe orienté de  $T$  d'arêtes  $a_1, \dots, a_n$ . Comme précédemment,  $\pi_1(\mathcal{G},C)$  contient  $G_{s_1}$  et  $G_{s_2}$ , et se plonge naturellement dans  $\pi_1(\mathcal{G},T)$ , aussi on travaille dans  $(\mathcal{G},C)$ .

Soit  $u \in G_{s_1} \cap G_{s_2}$ . Décomposons  $C$  le long de  $a_1$ . Notons  $C_1$  le sous-graphe ayant pour arêtes  $a_2, \dots, a_n$ , alors  $\pi_1(\mathcal{G},C)$  est l'amalgame de  $G_{s_1}$  et de  $\pi_1(\mathcal{G},C_1)$  le long de  $\varphi_{a_1}$ . Alors  $u \in G_{s_1} \cap \pi_1(\mathcal{G},C_1)$ , et donc  $u \in G_{a_1}^- \subset G_{s_1}$  et  $u \in G_{a_1}^+ \subset G_{e(a_1)} \subset \pi_1(\mathcal{G},C_1)$ , ce qui fournit le trajet en  $u$ , d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $e(a_1)$

$$u = u \xrightarrow{a_1} u = u$$

Maintenant, dans  $\pi_1(\mathcal{G},C_1)$ ,  $u \in G_{e(a_1)} \cap G_{s_2}$ . On procède au même raisonnement dans  $\pi_1(\mathcal{G},C_1)$ , et ainsi de suite. Le trajet produit des trajets successivement déterminés, est le trajet souhaité. ■

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.1** *Soit  $(\mathcal{G},X,T)$  un graphe de groupe décomposé. Soient  $s_1, s_2, s_3, s_4$  des sommets de  $X$ , et des éléments  $u, v \in \pi_1(\mathcal{G},X)$ , tels que  $u \in G_{s_1} \cap G_{s_2}$ , et  $v \in G_{s_3} \cap G_{s_4}$ .*

*Alors il existe un trajet de  $u$  à  $v$  d'origine  $s_1$  et d'extrémité  $s_3$ , si et seulement si il existe un trajet de  $u$  à  $v$ , d'origine  $s_2$  et d'extrémité  $s_4$ . De plus, ils ont même label.*



**Définition III.6.** Ainsi  $\mathcal{C}(u, s)$  ne dépend pas du choix de  $s$ , et on notera  $\mathcal{C}(u)$ . De même on parlera de trajet de  $u$  à  $v$ , et de circuit en  $u$ .

Le résultat qui suit, motive l'introduction des notions de circuits et de trajets. C'est le résultat fondamental de cette section.

**Proposition 3.2.2 (Théorème fondamental des trajets)** *Soit  $(\mathcal{G}, X, T)$  un graphe de groupe décomposé. Soient les éléments  $u, v$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  dans les sous-groupes de sommet respectifs  $G_{s_1}, G_{s_2}$ .*

*Alors  $u = hvh^{-1}$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , si et seulement si il existe un trajet de  $u$  à  $v$  ayant pour label  $h$ .*

**Démonstration** Nous avons déjà vu (définition III.2), que s'il existe un trajet de  $u$  à  $v$  ayant pour label  $h$  alors  $u = hvh^{-1}$ . Montrons la réciproque.

Soient donc,  $u \in G_{s_1}$ , et  $v \in G_{s_2}$  tels que  $u = hvh^{-1}$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Soit l'arête  $a \in \mathcal{A}_X$ ; on décompose  $(\mathcal{G}, X)$  le long de  $a$  afin d'obtenir le sous-graphe  $(\mathcal{G}, X_1)$ .

Si  $a$  est non  $T$ -séparante,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est l'extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  le long de  $\varphi_a : G_a^- \longrightarrow G_a^+$ . Les éléments  $u$  et  $v$  sont dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$ , et on peut donc les supposer cycliquement réduits de longueur 1. Puisque  $u = hvh^{-1}$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , avec le corollaire 3.1.2, soit  $h$  conjugue  $v$  en  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$ , soit  $h$  s'écrit sous forme réduite  $h = h_1 t_a^{\varepsilon_1} \cdots t_a^{\varepsilon_p} h_{p+1}$ , et il existe une suite finie  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  de  $G_a^- \cup G_a^+$ , avec  $m = 2p$  pour  $p \in \mathbb{N}_*$ , vérifiant les conditions :

$$\begin{aligned} u &= h_1 \gamma_1 h_1^{-1} & \gamma_m &= h_{p+1} v h_{p+1}^{-1} & \text{dans } \pi_1(\mathcal{G}, X_1) \\ \gamma_2 &= \varphi_a^{\varepsilon_1}(\gamma_1) \end{aligned}$$

et pour tout  $i = 2, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{2i-1} &= h_i \gamma_{2(i-1)} h_i^{-1} & \text{dans } \pi_1(\mathcal{G}, X_1) \\ \gamma_{2i} &= \varphi_a^{\varepsilon_i}(\gamma_{2i-1}) & \varepsilon_i = \pm 1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on symbolise ces conditions par la notation suivante, que l'on nomme un pré-trajet de  $u$  à  $v$ ,

$$u \underset{h_1}{\sim} \gamma_1 \xrightarrow{\varepsilon_1 a} \gamma_2 \underset{h_2}{\sim} \gamma_3 \xrightarrow{\varepsilon_2 a} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_p a} \gamma_m \underset{h_{p+1}}{\sim} v$$

avec  $-1 a$  qui dénote  $-a$ , et  $1 a$  qui dénote  $a$ . L'élément  $h_1 t_a^{\varepsilon_1} \cdots t_a^{\varepsilon_p} h_{p+1}$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est appelé label du pré-trajet. Il faut remarquer qu'avec cette notation,  $\gamma \xrightarrow{a} \gamma'$ , implique que  $\gamma \in G_a^-$  et  $\gamma' \in G_a^+$ .

Dans le cas où  $h$  est de longueur 1, on considère le pré-trajet de  $u$  à  $v$  :

$$u \underset{h}{\sim} v$$

Si  $a$  est  $T$ -séparante,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est l'amalgame des facteurs  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  et  $\pi_1(\mathcal{G}, X_2)$  le long de  $\varphi_a : G_a^- \longrightarrow G_a^+$ . Avec le corollaire 3.1.1, soit  $h$  conjugue  $v$  en  $u$  dans un

des facteurs, soit  $h$  s'écrit sous forme réduite  $h = h_1 \cdots h_{m+1}$ , et il existe une suite  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  de  $G_a^- \cup G_a^+$ , où deux éléments successifs de  $u, \gamma_1, \dots, \gamma_m, v$  sont conjugués dans un facteur, et deux couples successifs d'éléments conjugués sont dans des facteurs distincts. De plus, on a les  $m + 2$  égalités suivantes,

$$\gamma_m = h_{p+1} v h_{p+1}^{-1} \quad u = h_1 \gamma_1 h_1^{-1}$$

pour tout  $i = 1, \dots, m - 1$ ,

$$\gamma_i = h_i \gamma_{i-1} h_i^{-1}$$

chacune dans un facteur  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  ou  $\pi_1(\mathcal{G}, X_2)$ . Puisque  $a$  est  $T$ -séparante, si  $o(a)$  est dans  $X_1$ , alors  $e(a)$  est dans  $X_2$  et inversement. Supposons par exemple, que  $o(a) \in X_1$ . On se donne deux couples successifs,  $\gamma_{i-1}, \gamma_i$  conjugués par  $h_{i-1}$  dans un facteur, et  $\gamma_i, \gamma_{i+1}$  conjugués par  $h_i$  dans l'autre facteur. Supposons que  $\gamma_{i-1}, \gamma_i, h_{i-1}$  soient dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$ . On note alors

$$\gamma_{i-1} \underset{h_{i-1}}{\sim} \gamma_i \xrightarrow{a} \gamma_i \underset{h_i}{\sim} \gamma_{i+1}$$

Il faut remarquer que l'on a bien  $\gamma_i \in G_a^- = G_a^+$  et  $\gamma_i = \varphi_a(\gamma_i)$ . Dans l'autre cas, on note

$$\gamma_{i-1} \underset{h_{i-1}}{\sim} \gamma_i \xrightarrow{-a} \gamma_i \underset{h_i}{\sim} \gamma_{i+1}$$

et l'on a  $\gamma_i \in G_{-a}^- = G_{-a}^+$  et  $\gamma_i = \varphi_{-a}(\gamma_i)$ . On symbolise ainsi ces conditions par la notation que l'on baptise encore de pré-trajet de  $u$  à  $v$ ,

$$u \underset{h_1}{\sim} \gamma_1 \xrightarrow{\varepsilon a} \gamma_1 \underset{h_2}{\sim} \gamma_2 \xrightarrow{-\varepsilon a} \cdots \xrightarrow{\varepsilon(-1)^{m+1}a} \gamma_m \underset{h_{m+1}}{\sim} v$$

de label  $h = h_1 \cdots h_{m+1}$ .

Si  $h$  est de longueur 1, on a le pré-trajet trivial :

$$u \underset{h}{\sim} v$$

Revenons à la démonstration de la proposition ; on procède par induction en décomposant successivement  $X$  le long de ses arêtes. Après avoir décomposé  $X$  le long de  $a$ , on obtient l'un des précheminements précédents, que l'on note  $\mathcal{D}_1$  ; il est soit trivial, soit de la forme suivante :

$$\gamma_0^+ \underset{h_0}{\sim} \gamma_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} \gamma_i^+ \underset{h_i}{\sim} \gamma_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_m} \gamma_m^+ \underset{h_m}{\sim} \gamma_{m+1}^-$$

La notation  $\gamma_i^+ \sim \gamma_{i+1}^-$  implique la condition  $\gamma_i^+ = h_i \gamma_{i+1}^- h_i^{-1}$  dans un des facteurs  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  ou  $\pi_1(\mathcal{G}, X_2)$ , et de plus,  $\gamma_i^+, \gamma_{i+1}^-$  sont dans des groupes de sommet. On peut dès lors leur appliquer le même procédé dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  (ou  $\pi_1(\mathcal{G}, X_2)$ ), en décomposant  $X_1$  (ou  $X_2$ ) le long d'une arête. On obtient comme précédemment un précheminement  $\mathcal{E}_i$  de  $\gamma_i^+$  à  $\gamma_{i+1}^-$ , de label  $h_i$ . On construit alors un pré-trajet  $\mathcal{D}_2$  de  $u$  à  $v$  en substituant dans  $\mathcal{D}_1$  pour tout  $i = 0, \dots, m$ ,  $\gamma_i^+ \sim \gamma_{i+1}^-$  par le pré-trajet  $\mathcal{E}_i$ . Il est important de remarquer que  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ont même label  $h$ . On procède de la même façon lorsque  $\mathcal{D}_1$  est trivial.

En répétant ce procédé, on finit par obtenir le pré-trajet  $\mathcal{C}$ , de label  $h$ ,

$$u \underset{k_0}{\sim} d_1^- \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_i} d_i^+ \underset{k_i}{\sim} d_{i+1}^- \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots \xrightarrow{\alpha_q} d_q^+ \underset{h_q}{\sim} v$$

vérifiant en outre la condition que les égalités  $u = h_1 d_1^- h_1^{-1}$ ,  $d_i^+ = h_{i+1} d_{i+1}^- h_{i+1}^{-1}$  et  $d_q^+ = h_{q+1} v h_{q+1}^{-1}$ , ont lieu dans des sous-groupes de sommet. On a ainsi réuni toutes les conditions pour avoir un trajet de  $u$  à  $v$ , à l'exception d'une : que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  soit un chemin de  $X$ . A priori rien n'assure que ce soit le cas, et une manipulation simple montre qu'il est en effet facile d'avoir  $e(\alpha_i) \neq o(\alpha_{i+1})$ . Néanmoins,  $d_i^+ \in G_{\alpha_i}^+ \subset G_{e(\alpha_i)}$ ,  $d_{i+1}^- \in G_{\alpha_{i+1}}^- \subset G_{o(\alpha_{i+1})}$ , et  $d_i^+, d_{i+1}^-$  sont dans un même groupe de sommet  $G_s$ . Avec la proposition 3.2.1, on peut construire un trajet  $\mathcal{C}_i^+$ , de label 1, de  $d_i^+$  à  $d_i^+$ , d'origine  $e(\alpha_i)$  et d'extrémité  $s$ . de même on construit un trajet  $\mathcal{C}_{i+1}^-$  de  $d_{i+1}^-$  à  $d_{i+1}^-$  d'origine  $s$  et d'extrémité  $o(\alpha_{i+1})$ . On substitue alors dans  $\mathcal{C}$ ,

$$\dots \xrightarrow{\alpha_i} d_i^+ \underset{k_i}{\sim} d_{i+1}^- \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots$$

par

$$\dots \xrightarrow{\alpha_i} \underbrace{d_i^+ = d_i^+ \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_r} d_i^+}_{\mathcal{C}_i^+} \underset{k_i}{\sim} \underbrace{d_{i+1}^- \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_s} d_{i+1}^- = d_{i+1}^-}_{\mathcal{C}_{i+1}^-} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots$$

Cette opération n'a pas modifié le label du pré-trajet, et cette fois-ci,  $(\alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_r, \delta_1, \dots, \delta_s, \alpha_{i+1})$  est un chemin. On procède ainsi pour tout  $i = 1, \dots, q$ , pour peu que ce soit nécessaire. On peut alors changer la notation  $\sim$  par  $\circ$ , car le pré-trajet obtenu, est un trajet de  $u$  à  $v$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , ayant pour label  $h$ , ce qui conclut la preuve.  $\blacksquare$

**Corollaire 3.2.2** *Soit le graphe de groupe décomposé  $(\mathcal{G}, X, T)$ . Soit  $G_s$  un sous-groupe de sommet de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , et  $u \in G_s$ .*

*Alors le centralisateur  $\mathcal{Z}(u)$  de  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est l'ensemble  $\mathcal{C}(u)$  des labels des circuits en  $u$ .*

### 3.2.2 Théorème de commutativité

Avec l'étude faite dans la section précédente, nous pouvons généraliser les théorèmes 3.1.2 et 3.1.4, qui caractérisent les éléments qui commutent dans un produit amalgamé et dans une extension HNN, au cas du groupe fondamental d'un graphe de groupe.

#### Théorème 3.2.1 (Théorème de commutativité pour un graphe de groupe)

Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe muni d'une décomposition. Soient  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$ , et  $x, y \in \Gamma$  des éléments qui commutent. Alors,

- (i) Si  $x$  est dans un sous-groupe d'arête, alors  $y \in \mathcal{C}(x)$ , i.e.  $y$  est le label d'un circuit en  $x$ .
- (i')  $x$  ou  $y$  est dans le conjugué d'un sous-groupe d'arête.
- (ii) Si  $x$  est dans le conjugué d'un sous-groupe de sommet  $G_s$ , et n'est pas dans le conjugué d'un sous-groupe d'arête, alors  $y$  est dans le même conjugué de  $G_s$ .
- (iii) Si ni  $x$  ni  $y$  n'est dans le conjugué d'un sous-groupe de sommet, alors  $x = ghg^{-1}W^j$ ,  $y = gh'g^{-1}W^k$ , où  $g, W \in \Gamma$ ,  $h, h'$  sont dans un sous-groupe d'arête  $G_a^-$ , et  $ghg^{-1}, gh'g^{-1}, W$  commutent deux à deux.

**Démonstration** cas (i) C'est le corollaire 3.2.2. □

cas (i') Il n'y a rien à montrer dans ce cas. □

cas (ii) Si  $x$  est dans un groupe de sommet, et n'est pas dans le conjugué d'un groupe d'arête, tout circuit en  $x$  est trivial, et donc le corollaire 3.2.2 permet de conclure. Si  $x$  est dans le conjugué d'un groupe de sommet  $gG_sg^{-1}$ , alors  $g^{-1}xg$  est dans  $G_s$ ,  $g^{-1}xg$  et  $g^{-1}yg$  commutent, et le même raisonnement s'applique. □

Pour achever la démonstration, on procède par induction sur le nombre d'arêtes de  $X$ . Si  $X$  n'a qu'une arête, les théorèmes 3.1.2 et 3.1.4 permettent de conclure. Il est essentiel de remarquer que pour tout  $g \in \Gamma$ , si  $x, y \in \Gamma$  commutent et vérifient une des conclusions (i), (i'), (ii) ou (iii), alors,  $gxg^{-1}$  et  $gyg^{-1}$  commutent et vérifient (i), (i'), (ii) ou (iii). Plus précisément, lorsque  $x$  et  $y$  vérifient (i), (i'), (ii), (iii),  $gxg^{-1}$  et  $gyg^{-1}$  vérifient respectivement (i'), (i'), (ii), (iii).

On considère une arête  $\alpha$  de  $X$ . On décompose  $X$  le long de  $\alpha$ . Si  $\alpha$  est non  $T$ -séparante, on note  $Y$  le graphe obtenu. Alors  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$  est une extension HNN de  $\Gamma' = \pi_1(\mathcal{G}, Y)$ . Avec le théorème 3.1.4, soit on a la conclusion (i) (i') ou (iii), et l'on peut conclure, soit il existe  $g \in G$ , tel que  $x$  et  $y$  sont dans  $g^{-1}\Gamma'g$ . On pose alors  $x' = gxg^{-1}$  et  $y' = gyg^{-1}$ . Les éléments  $x'$  et  $y'$  sont dans  $G'$  et l'on peut appliquer l'induction.

Si  $\alpha$  est  $T$ -séparante, on note  $Y_1$  et  $Y_2$  les deux composantes connexes du graphe obtenu en décomposant  $Y$  le long de  $\alpha$ . Alors  $\Gamma$  est un produit amalgamé de  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$  et  $\Gamma_2 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_2)$ . Ainsi, avec le théorème 3.1.2, soit  $x$  et  $y$  vérifient les conditions (i), (i') ou (iii), soit il existe  $g \in \Gamma$ , tel que  $x$  et  $y$  soient dans  $g^{-1}\Gamma_1g$  (respectivement  $g^{-1}\Gamma_2g$ ). On pose alors  $x' = gxg^{-1}$  et  $y' = gyg^{-1}$ ,  $x', y' \in \Gamma_1$  (respectivement  $x', y' \in \Gamma_2$ ), et l'on peut appliquer l'induction. ■

### 3.2.3 Théorème de conjugaison

Nous nous intéressons maintenant au cas de deux éléments conjugués dans un graphe de groupe. La caractérisation que nous employons, n'a pour seul but que la résolution du problème de la conjugaison. A ce titre, cette section constitue la clef de voute de la résolution de ce problème dans le cas du groupe d'une variété haken, c'est à dire de la majeure partie de notre travail.

Nous avons pris le parti de ne pas aborder dans ce travail la notion de forme normale dans un graphe de groupe, lui préférant l'approche inductive, que nous avons utilisé jusque là. Nous décomposerons successivement le graphe de groupe le long de ses arêtes, décomposant ainsi son groupe fondamental en amalgame ou en extension HNN. Nous aurons alors besoin d'introduire une certaine procédure de re-écriture de mots, pour étudier les éléments conjugués. C'est de cela dont nous parlerons tout d'abord.

**Définition III.7.** Soit  $(\mathcal{G}, X, T)$  un graphe de groupe décomposé. Un **ordre de décomposition** est un ordre (au sens large, *i.e.* une relation réflexive, antisymétrique et transitive) total  $\prec$  sur  $\mathcal{A}_X^+$ , tel que

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathcal{A}_X^+ - \mathcal{A}_T^+) \times \mathcal{A}_T^+, \quad \alpha \prec \beta$$

Intuitivement, un ordre de décomposition, n'est rien d'autre que le choix d'un ordre total sur  $\mathcal{A}_X^+$ , pour lequel les arêtes non  $T$ -séparantes précèdent les arêtes  $T$ -séparantes. Puisque  $\mathcal{A}_X^+$  est un ensemble fini, tout sous-ensemble  $E$  non vide admet un minimum pour  $\prec$ , que nous noterons  $\min_{\prec}(E)$  ou plus simplement  $\min(E)$ . Ainsi on peut parler du  $1^{er}, 2^{ème}, \dots, p^{ième}$  élément de  $\mathcal{A}_X^+$ .

Nous allons décomposer le graphe de groupe le long de toutes ses arêtes. L'ordre de décomposition décrira l'ordre dans lequel nous effectuerons cette décomposition. Il sera purement arbitraire, nous avons juste, par commodité, souhaité décomposer le  $\pi_1$  d'abord en extension HNN, puis en amalgame.

**Définition III.8.** Un sous-graphe de groupe  $(\mathcal{G}, Y)$  de  $(\mathcal{G}, X)$ , sera dit  **$\prec$ -occurent**, si soit  $(\mathcal{G}, Y) = (\mathcal{G}, X)$ , soit il existe un entier  $n \geq 1$ , tel que le graphe  $Y$  soit une composante connexe du graphe obtenu en décomposant  $X$  le long des  $n$  premiers éléments de  $\mathcal{A}_X^+$ . C'est à dire que c'est un sous-graphe de groupe apparaissant lors de la décomposition de  $(\mathcal{G}, X)$  imposée par l'ordre de décomposition  $\prec$ .

#### Procédure de réductions cycliques successives

Soit un graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X, T)$ , que l'on munit d'un ordre de décomposition  $\prec$ . Donnée une présentation des sous-groupes de sommets de  $(\mathcal{G}, X)$ , on dispose d'une présentation canonique de  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$ , et d'une famille génératrice notée  $\mathcal{Gen}(X)$  (cf. théorème 2.2.3, remarque 5), que nous fixons dans la suite.

Considérons un élément  $u \in \Gamma$ , donné par un mot sur la famille génératrice  $S = \mathcal{Gen}(X)$  de  $\Gamma$ . Notons  $\alpha_1 = \min(\mathcal{A}_X^+)$ ; on décompose le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  le long de l'arête  $\alpha_1$ .

Si  $\alpha_1$  est non  $T$ -séparante, soit  $X_1$  le graphe obtenu en décomposant  $X$  le long de  $\alpha_1$ . Alors  $\Gamma$  est l'extension HNN de  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, X_1)$  le long de  $\varphi_{\alpha_1} : G_{\alpha_1}^- \longrightarrow G_{\alpha_1}^+$ .

Remarquons que  $S = S_1 \cup \{t_{\alpha_1}\}$ , où  $S_1 = \mathcal{G}en(X_1)$  est une famille génératrice de  $\Gamma_1$ . Au sens de la décomposition HNN de  $\Gamma$ , on considère un mot  $u_1$  sur  $S$ , cycliquement réduit représentant un conjugué de  $u$  dans  $\Gamma$ .

– Si  $|u_1| > 1$ , alors  $u_1$  est un représentant satisfaisant de la classe de conjugaison de  $u$ , et la procédure s'arrête.

– Si  $|u_1| = 1$ , alors  $u_1$  est un mot sur  $S_1$ , et représente un élément de  $\Gamma_1$ . On considère l'ordre de décomposition induit par  $\prec$  sur  $\mathcal{A}_{X_1}^+$ , et on répète la procédure à  $u_1$  dans  $(\mathcal{G}, X_1, T_1)$ , (en posant  $T_1 = T \cap X_1$ ).

Si  $\alpha_1$  est  $T$ -séparante, on considère les graphes  $X_1, X_2$ , obtenus en décomposant  $X$  le long de  $\alpha_1$ , et  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, X_1), \Gamma_2 = \pi_1(\mathcal{G}, X_2)$ . Alors  $\Gamma$  est l'amalgame des groupes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  le long de  $\varphi_{\alpha_1} : G_{\alpha_1}^- \longrightarrow G_{\alpha_1}^+$ . Au sens de cette décomposition de  $\Gamma$ , on peut considérer un mot  $u_1$  sur  $S$  cycliquement réduit, conjugué à  $u$  dans  $\Gamma$ .

– Si  $|u_1| > 1$ , alors  $u_1$  est un représentant de la classe de conjugaison de  $u$ , satisfaisant, et la procédure s'arrête.

– Si  $|u_1| = 1$ , alors  $u_1$  est un mot sur  $\mathcal{G}en(X_1)$  ou  $\mathcal{G}en(X_2)$ , et respectivement,  $u_1 \in \Gamma_1$  ou  $u_1 \in \Gamma_2$ . Sans perte de généralité, supposons que  $u_1 \in \Gamma_1$ . On considère l'ordre de décomposition induit par  $\prec$  sur  $\mathcal{A}_{X_1}^+$ , et on réapplique la même procédure à  $u_1$  dans  $(\mathcal{G}, X_1, T_1)$ .

En répétant ce procédé, on finit par trouver un mot  $u_1$ , représentant de la classe de conjugaison de  $u$  dans  $\Gamma$ , avec un entier  $p \geq 0$ , et un graphe  $X_p \prec$ -occurent, composante connexe du graphe obtenu en décomposant  $X$  le long des  $p$  premiers éléments  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  de  $\mathcal{A}_X^+$  (en posant  $X_0 = X$ ), tel que  $u_1 \in \pi_1(\mathcal{G}, X_p)$ , et soit :

- Le graphe  $X_p$  est réduit à un sommet  $s$ ,  $u_1$  est un mot sur  $\mathcal{G}en(s)$ , et  $u_1 \in G_s$ .
- Le graphe  $X_p$  n'est pas réduit à un sommet. Lorsque l'on décompose  $X_p$  le long de l'arête  $\alpha_{p+1} = \min(\mathcal{A}_{X_p}^+)$ ,  $\pi_1(\mathcal{G}, X_p)$  se décompose en une extension HNN ou un amalgame, et au sens de cette décomposition,  $u_1$  est un mot cycliquement réduit (sur  $\mathcal{G}en(X_p)$ ), de longueur  $|u_1| > 1$ .

### **Théorème 3.2.2 (Théorème de conjugaison pour un graphe de groupe)**

Soit  $(\mathcal{G}, X, T)$  un graphe de groupe décomposé muni d'un ordre de décomposition  $\prec$ . Soient  $u, v \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$  des éléments conjugués, et les mots  $u_1, v_1$  obtenus en appliquant la procédure de réductions cycliques successives à des mots sur  $\mathcal{G}en(X)$  représentant  $u$  et  $v$ . Alors soit :

(i) Il existe deux sommets  $s, s'$  de  $X$ , tels que  $u_1$  et  $v_1$  soient des mots respectivement sur  $\mathcal{G}en(s)$  et  $\mathcal{G}en(s')$ . En particulier,  $u_1$  et  $v_1$  représentent dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  des éléments des sous-groupes de sommet  $G_s, G_{s'}$ , et il existe un trajet de  $u_1$  à  $v_1$  dans  $(\mathcal{G}, X, T)$ .

(ii)  $u_1$  et  $v_1$  sont des mots sur  $\mathcal{G}en(X_p)$  où  $X_p$  est un sous-graphe  $\prec$ -occurent de  $X$ , et représentent des éléments conjugués dans  $\Gamma_p = \pi_1(\mathcal{G}, X_p)$ . En décomposant  $X_p$  le long de l'arête  $\alpha_{p+1} = \min(\mathcal{A}_{X_p}^+)$ ,  $\Gamma_p$  se décompose, et au sens de cette décomposition,  $u_1, v_1$  sont de même longueur  $|u_1| = |v_1| > 1$  (les notations sont celles du paragraphe précédent).

**Démonstration** Considérons donc sous ces hypothèses, deux éléments  $u, v$  de  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$  conjugués, donnés par des mots sur la famille génératrice  $\mathcal{G}en(X)$ . On leur

applique la procédure de réductions cycliques successives, pour obtenir des mots  $u_1, v_1$ , représentants de leur classe de conjugaison dans  $\Gamma$ . Observons de plus près, ce qui peut se passer à chaque étape de la décomposition de  $X$ . On décompose  $X$  le long d'une arête  $\alpha$ . Le groupe  $\Gamma$  se décompose soit en une extension HNN de  $\Gamma_1$ , soit en un amalgame de  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , le long de  $\varphi_\alpha : G_\alpha^- \longrightarrow G_\alpha^+$ , selon si  $\alpha$  est ou non  $T$ -séparante, et  $\Gamma_1, (\Gamma_2)$  est(sont) le(s) groupe(s) du(des) graphe(s) obtenu(s). Avec les corollaires 3.1.1 et 3.1.2, dans cette décomposition de  $\Gamma$  on obtient des représentant cycliquement réduits  $u_0, v_0$  des classes de conjugaison de  $u$  et  $v$ , qui ont même longueur, et l'on est dans un (seul) des cas suivants :

**cas 1)**  $|u_0| = |v_0| > 1$ .

**cas 2)**  $|u_0| = |v_0| = 1$ , et  $u_0, v_0$  sont dans un même facteur  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$ , et conjugués dans ce facteur.

**cas 3)**  $|u_0| = |v_0| = 1$ , et  $u_0, v_0$  ne sont pas conjugués dans un même facteur. Dans ce cas  $u_0$  est dans un facteur, et conjugué dans ce facteur à un élément  $c_u$  de  $G_\alpha^\pm$ ,  $v_0$  est dans un facteur et conjugué dans ce facteur à un élément  $c_v$  de  $G_\alpha^\pm$ , et  $c_u$  et  $c_v$  sont conjugués dans  $\Gamma$ .

**Dans le cas 1)**, on pose  $u_1 = u_0, v_1 = v_0$ , et la procédure s'arrête. On se trouve alors dans le cas (ii) de la conclusion du théorème.

**Dans le cas 2)**, si  $u_0, v_0$  sont dans un facteur  $\pi_1(\mathcal{G}, X_1)$ , et si  $X_1$  est réduit à un sommet  $s$ , alors on pose  $u_1 = u_0, v_1 = v_0$ ;  $u_1$  et  $v_1$  sont conjugués dans  $G_s$ , et donc il existe un trajet (trivial) de  $u_1$  à  $v_1$ , et la procédure s'arrête. On se trouve dans le cas (i) de la conclusion du théorème. Sinon, on applique la même procédure à  $u_0$  et  $v_0$  dans  $(\mathcal{G}, X_1)$ .

**Dans le cas 3)**, puisque  $c_u$  et  $c_v$  sont conjugués dans  $\Gamma$ , et sont dans les sous-groupes d'arête  $G_\alpha^-$  ou  $G_\alpha^+$ , avec la proposition 3.2.2, il existe un trajet  $\mathcal{C}$  de  $c_u$  à  $c_v$  dans  $(\mathcal{G}, X)$ . Si les facteurs sont des groupes de sommet, on pose  $u_1 = u_0$  et  $v_1 = v_0$ , et on obtient immédiatement l'existence du trajet souhaité de  $u_1$  à  $v_1$  dans  $(\mathcal{G}, X)$ . On se trouve dans le cas (i) de la conclusion du théorème, et la procédure s'arrête. Sinon, on applique le même procédé de réduction cyclique successive, dans un facteur, à  $u_0$  et  $c_u$  d'une part, et  $v_0$  et  $c_v$  d'autre part.

Sans perte de généralité, supposons que  $c_u \in G_\alpha^-$ , et que l'arête  $\alpha$  a pour origine un sommet du graphe  $X_1$ . Ainsi,  $G_\alpha^- \subset \Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, X_1)$ , et  $u_0, c_u \in \Gamma_1$ . Puisque  $c_u$  est dans le sous-groupe d'arête  $G_\alpha^-$  de  $(\mathcal{G}, X_1)$ , dans toute décomposition de  $(\mathcal{G}, X_1)$  le long d'une arête,  $c_u$  est un mot de longueur 1. Pour poursuivre la procédure, on décompose  $(\mathcal{G}, X_1)$  le long de l'arête  $\beta = \min(\mathcal{A}_{X_1}^+)$ , ce qui décompose le groupe  $\Gamma_1$  en amalgame ou en extension HNN. Dans cette décomposition de  $\Gamma_1$ ,  $c_u$  est de longueur 1, et puisque  $u_0$  et  $c_u$  sont conjugués dans  $\Gamma_1$ , en réduisant cycliquement  $u_0$ , on obtient un mot  $u'_0$  de longueur 1, dans la classe de conjugaison de  $u_0$  et de  $c_u$  dans  $\Gamma_1$ . Ainsi, on se trouve dans le cas 2) ou 3). Puisque pour tout sous-graphe de groupe  $(\mathcal{G}, Y)$  de  $(\mathcal{G}, X)$ , un élément d'un sous-groupe d'arête  $G_\gamma^-$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ , est de longueur 1 dans toute décomposition de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  le long d'une arête de  $Y$ , le même argument montre qu'en répétant le même procédé, on ne se trouvera jamais dans le cas 1). Aussi, on finira par déterminer un conjugué de  $u$  dans  $\Gamma$ ,  $u_1$ , dans un sous-groupe de sommet  $G_s$ , conjugués à  $c_u \in G_\alpha^-$  dans  $\Gamma$ , et donc un trajet  $\mathcal{C}_u$  dans  $(\mathcal{G}, X)$  de  $u_1$  à  $c_u$ . En procédant de la même façon avec  $c_v$  et  $v_0$ , on trouvera

de même un élément  $v_1$  dans un sous-groupe sommet, conjugué de  $v$ , et un trajet  $\mathcal{C}_v$  de  $v_1$  à  $c_v$  dans  $(\mathcal{G}, X)$ . Alors, le trajet produit  $\mathcal{C}_u.\mathcal{C}.\mathcal{C}_v^{-1}$  est un trajet de  $u_1$  à  $v_1$  dans  $(\mathcal{G}, X)$ . On se trouve dans le cas (i) de la conclusion du théorème. ■



### 3.2.4 Problème de la conjugaison et double d'un groupe

Comme promis, nous montrons dans cette section que le problème de la conjugaison dans un groupe  $G$  se réduit au problème de la conjugaison dans le double de  $G$ . Commençons par définir la notion de double d'un groupe.

**Définition III.9.** Soit  $G$  un groupe, et  $H_1, H_2, \dots, H_n$  des sous-groupes de  $G$ . Considérons une copie isomorphe  $G'$  de  $G$ , et un isomorphisme  $\varphi : G \longrightarrow G'$ . Notons  $H'_1, H'_2, \dots, H'_n$  les images respectives de  $H_1, H_2, \dots, H_n$  par  $\varphi$ . Considérons le graphe de groupe ayant deux sommets  $s, s'$ , et  $n$  arêtes  $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , ayant pour origine  $s$  et extrémité  $s'$ , avec  $G_s = G$ ,  $G_{s'} = G'$ , et pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $G_{\alpha_i}^- = H_i$ ,  $G_{\alpha_i}^+ = H'_i$ , et  $\varphi_{\alpha_i}$  est la restriction de  $\varphi$  à  $H_i$ . Le groupe fondamental de  $(\mathcal{G}, X)$  est appelé le **double** de  $G$  le long des sous-groupes  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , et pourra être noté  $2G$ .

**Proposition 3.2.3** Soient  $G$  un groupe, et  $2G$  son double. Alors  $G$  se plonge naturellement dans  $2G$ , et si  $u, v \in G$ , alors  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $2G$  si et seulement si ils sont conjugués dans  $G$ .

**Démonstration** Reprenons les notations de la définition III.9. La première assertion provient clairement de la définition. Puisque  $G$  se plonge dans  $2G$ , si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $G$ , alors ils sont conjugués dans  $2G$ . Montrons la réciproque. Supposons que  $u$  et  $v$  soient conjugués dans  $2G$ . Puisque  $u$  et  $v$  sont dans le sous-groupe de sommet  $G_s = G$ , avec le théorème 3.2.2, il existe un trajet réduit  $\mathcal{C}$  de  $u$  à  $v$ . Si  $\mathcal{C}$  est trivial, alors  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $G$ , aussi on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est non trivial. Puisque  $u$  et  $v$  sont dans le même groupe de sommet  $G_s$ , que  $X$  n'a que deux sommets  $s, s'$ , et que toute arête  $\alpha_i$  a pour origine  $s$  et pour extrémité  $s'$ , le chemin sous-jacent à  $\mathcal{C}$  est nécessairement de longueur paire. De plus, si  $p$  est la longueur du chemin, il existe une application de  $\{1, \dots, p\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$  (on note  $\sigma_i$  l'image de  $i$ ), telle que le chemin sous-jacent à  $\mathcal{C}$  soit :

$$(\alpha_{\sigma_1}, -\alpha_{\sigma_2}, \dots, \alpha_{\sigma_{2i-1}}, -\alpha_{\sigma_{2i}}, \dots, \alpha_{\sigma_{p-1}}, -\alpha_{\sigma_p})$$

Ainsi, nécessairement,  $\mathcal{C}$  est de la forme  $\mathcal{C}_0 \mathcal{C}_1$  avec  $\mathcal{C}_0$  :

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} u_1^- \xrightarrow{\alpha_{\sigma_1}} u_1^+ \underset{h'}{\circlearrowleft} u_2^- \xrightarrow{-\alpha_{\sigma_2}} u_2^+ = u_2^+$$

où  $u, u_1^-, u_2^+, k_1 \in G$ ,  $u_1^+, u_2^-, h' \in G'$ . Puisque  $u_1^+ = \varphi(u_1^-)$ ,  $u_2^- = \varphi(u_2^+)$ , et  $h' = \varphi(h)$  pour un certain  $h \in G$ , alors  $u_1^- = hu_2^+h^{-1}$  dans  $G$ . Ainsi on a le trajet trivial  $\mathcal{D}$  de  $u$  à  $u_2^+$

$$u \underset{k_1h}{\circlearrowleft} u_2^+$$

dans  $G_s = G$ . Considérons le trajet  $\mathcal{D} \mathcal{C}_1$ . Il va de  $u$  à  $v$ , et a pour chemin sous-jacent :

$$(\alpha_{\sigma_3}, -\alpha_{\sigma_4}, \dots, \alpha_{\sigma_{2i-1}}, -\alpha_{\sigma_{2i}}, \dots, \alpha_{\sigma_{p-1}}, -\alpha_{\sigma_p})$$

qui est de longueur  $p - 2$ . Ainsi en appliquant le même argument à  $\mathcal{D} \mathcal{C}_1$ , puis, successivement, à tous les trajets de  $u$  à  $v$  obtenus, on finit par construire un trajet trivial de  $u$  à  $v$ . Ainsi  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $G$ . ■

### 3.2.5 Propriétés algébriques d'un graphe de groupe sans circuit

Après l'étude faite tout au long de cette section, nous nous proposons de mettre en évidence que la «complexité» algébrique de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  résulte pour une part significative, de la «complexité» des circuits de  $(\mathcal{G}, X)$ . Nous commençons par nous intéresser dans cette partie au cas limite, où  $(\mathcal{G}, X)$  ne contient pas de circuits, dans un sens que nous allons commencer par définir. Cette étude sera poursuivie, dans un cadre plus large, dans le chapitre 6. Avertissons tout de même le lecteur, du fait que cette section n'est pas nécessaire à l'établissement du résultat principal, et qu'elle admet, avec le chapitre 6, une lecture indépendante.

**Définition III.10.** Nous aurons besoin dans la pratique de parler de **sous-trajet** d'un trajet  $\mathcal{T}$ . Si  $\mathcal{T}$  est donné par,

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{h_i}{\circ} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \circ v$$

pour considérer un sous-trajet de  $\mathcal{T}$ , on considère un sous-chemin  $(a_p, \dots, a_q)$  de  $(a_1, \dots, a_n)$ . On restreint alors le trajet à ce sous-chemin. On a plusieurs façons de procéder, qui sont désignées par les notations :

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{p-1}} c_{p-1}^+ \underset{h_{p-1}}{\circ} c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+ \underset{h_q}{\circ} c_{q+1}^- \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \circ v$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{D}}$

dans ce cas, le sous-trajet  $\mathcal{D}$ , est le trajet :

$$c_{p-1}^+ \underset{h_{p-1}}{\circ} c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+ \underset{h_q}{\circ} c_{q+1}^-$$

ou

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{p-1}} c_{p-1}^+ \underset{h_{p-1}}{\circ} c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+ \underset{h_q}{\circ} c_{q+1}^- \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \circ v$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{D}}$

dans ce cas, le sous-trajet  $\mathcal{D}$ , est le trajet :

$$c_{p-1}^+ \underset{h_{p-1}}{\circ} c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+ = c_q^+$$

ou

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{p-1}} c_{p-1}^+ \underset{h_{p-1}}{\circ} \underbrace{c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+}_{\mathcal{D}} \underset{h_q}{\circ} c_{q+1}^- \cdots \xrightarrow{a_n} c_n^+ \circ v$$

dans ce cas, le sous-trajet  $\mathcal{D}$ , est le trajet :

$$c_p^- = c_p^- \xrightarrow{a_p} \cdots \xrightarrow{a_q} c_q^+ = c_q^+$$

Le lecteur déduira sans peine le quatrième et dernier cas.

Plutôt que d'utiliser cette notation utilisant des accolades, nous pourrions aussi désigner un sous-trajet par l'utilisation de pointillés, comme dans la définition qui

suit.

**Définition III.11.** Un trajet est dit **réduit**, lorsqu'il ne contient pas de sous-trajet de la forme suivante, avec  $h \in G_a^+ = G_{-a}^-$ :

$$\cdots c_1 \xrightarrow{a} c_2 \underbrace{\circlearrowleft_h c_3}_{\text{dans } G_a^+} \xrightarrow{-a} c_4 \cdots$$

Si un trajet  $\mathcal{C}$  n'est pas réduit, on peut procéder à la substitution dans  $\mathcal{C}$ , consistant à remplacer

$$\cdots \xrightarrow{a_0} u \circlearrowleft_{h_u} c_1 \xrightarrow{a} c_2 \circlearrowleft_h c_3 \xrightarrow{-a} c_4 \circlearrowleft_{h_v} v \xrightarrow{a_1} \cdots$$

par

$$\cdots \xrightarrow{a_0} u \circlearrowleft_{h_u \varphi_{-a}(h) h_v} v \xrightarrow{a_1} \cdots$$

Une telle opération est appelée une **réduction** de  $\mathcal{C}$ . Il est clair que tout trajet peut être transformé par une suite finie de réductions, en un trajet réduit, de même label. Il est moins clair que l'ordre des réductions n'importe pas, *i.e.* que le trajet réduit obtenu est unique. Il est élémentaire, mais fastidieux, de vérifier que c'est bien le cas.

**Définition III.12.** Un graphe de groupe décomposé est dit **sans circuit**, si pour tout  $u \neq 1$ , tout circuit réduit en  $u$  est trivial. Nous pourrions remarquer que l'adjectif décomposé est redondant.

**Exemple** Considérons un graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ , dont les groupes de sommets  $G_s$  vérifient tous la propriété suivante : si  $G_1, G_2, \dots, G_n$  sont les sous-groupes d'arête de  $G_s$ , alors si  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , et  $i \neq j$ , aucun élément non trivial de  $G_i$  n'est conjugué à un élément de  $G_j$ , et si deux éléments  $c, c'$  de  $G_i$ , sont conjugués par un élément  $h_i$  dans  $G_s$ , alors  $c = c'$  et  $h_i \in G_s$ . Alors  $(\mathcal{G}, X)$  est sans circuit. Avec la proposition 4.3.1, c'est le cas pour le graphe associé à une décomposition minimale d'une variété Haken à bord torique ou vide, dont toutes les pièces élémentaires sont des variétés hyperboliques de volume fini.

Le groupe fondamental d'un graphe de groupe sans circuit vérifie des propriétés algébriques particulièrement simples.

**Théorème 3.2.3** Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe décomposé sans circuit. Soit  $u \neq 1$  un élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  et  $\mathcal{Z}(u)$  le centralisateur de  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

Alors, soit :

- (i) Si  $u$  est dans un sous-groupe de sommet  $G_s$ ,  $\mathcal{Z}(u)$  est le centralisateur de  $u$  dans  $G_s$ .
- (ii)  $u$  est dans un conjugué d'un sous-groupe de sommet.
- (iii) Si  $u$  n'est pas dans le conjugué d'un sous-groupe de sommet, alors  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini.

**Démonstration** Cas (i) Avec le théorème 3.2.1, si  $x$  est dans un groupe de sommet, et si  $y$  commute avec  $x$ , alors  $y$  est le label d'un circuit trivial, et donc  $y$  est dans  $G_s$ .

Cas (iii) Supposons que  $y$  soit dans  $\mathcal{Z}(u)$ , et que  $x$  ne soit pas dans le conjugué d'un facteur. Avec le théorème 3.2.1,  $x = ghg^{-1}W^r$  et  $y = gh'g^{-1}W^s$ , et  $ghg^{-1}, gh'g^{-1}, W$  commutent deux à deux. Ainsi, soit  $h = h' = 1$ , soit  $g^{-1}Wg$  commute avec un élément non trivial d'un sous-groupe d'arête  $G_a^-$ . Ainsi  $g^{-1}Wg$  est le label d'un circuit réduit, et donc puisque  $(\mathcal{G}, X)$  est sans circuit,  $g^{-1}Wg$  est dans le groupe de sommet  $G_s$ , contenant  $G_a^-$ , avec  $s = o(a)$ . Ainsi  $x$  ou  $y$  est dans  $gG_sg^{-1}$ . Mais avec le (i), ceci implique que  $x$  est dans  $gG_sg^{-1}$ , ce qui est contradictoire. Ainsi,  $h = h' = 1$ , et  $x$  et  $y$  sont dans le groupe cyclique engendré par  $W$ . Nécessairement,  $W$  n'est pas dans le conjugué d'un sous-groupe de sommet, et est donc sans torsion. ■

Rappelons qu'un groupe  $G$  est dit avoir une **structure de racines triviale** (SRT), si pour tout  $g \in G$ , l'ensemble  $\{x \in G; \exists n \in \mathbb{Z}_*, x^n = g\}$  est inclus dans un sous-groupe cyclique.

**Théorème 3.2.4** *Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe muni d'une décomposition, sans circuit. Soient  $g$  et  $x$  des éléments non triviaux de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .*

*Si  $x$  est une racine de  $G$ , alors soit  $x$  et  $g$  sont dans un même conjugué d'un sous-groupe de sommet, soit  $x$  est dans le sous-groupe cyclique infini  $\mathcal{Z}(g)$ . En d'autres termes,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est SRT, si et seulement si tous ses groupes de sommet sont SRT.*

**Démonstration** il suffit de remarquer que sous ces hypothèses,  $x$  et  $g$  commutent, et d'appliquer le théorème précédent. ■

Il est clair que la propriété d'être sans circuit est très restrictive. Les graphes de groupe qui nous intéresseront ne la vérifieront en général pas. Seulement, nous verrons au chapitre 6 qu'il suffit de la généraliser légèrement, pour contenir la classe des graphes associés à la décomposition minimale d'une variété Haken.

### 3.3 Démonstrations des théorèmes 3.1.3 et 3.1.4

#### Démonstration du théorème 3.1.3

Nous montrons d'abord que  $\gamma$  est conjugué à un élément cycliquement réduit. Nous procédons par l'absurde. Supposons que  $\gamma$  ne soit pas conjugué à un élément cycliquement réduit. Soit  $K$  la classe des conjugués de  $\gamma$ , et soit  $\mu$  un élément de  $K$  de longueur minimale dans  $K$ . Puisque  $\mu$  n'est pas cycliquement réduit, alors nécessairement  $|\mu| > 1$ .

L'élément  $\mu$  s'écrit sous forme réduite  $\mu = \mu_1 t^{\varepsilon_1} \cdots \mu_n t^{\varepsilon_n} \mu_{n+1}$ , et quitte à conjuguer  $\mu$  par  $\mu_{n+1}$ , on peut supposer que  $\mu_{n+1} = 1$ , c'est à dire que  $\mu = \mu_1 t^{\varepsilon_1} \cdots \mu_n t^{\varepsilon_n}$ . Puisque  $\mu$  n'est pas cycliquement réduit,  $|\mu| > 2$ , et  $t^{\varepsilon_n} \mu_1 t^{\varepsilon_1}$  est un pinch, et alors :

$$\begin{aligned} \mu_n t^{\varepsilon_n} \mu t^{-\varepsilon_n} \mu_n^{-1} &= \mu_n t^{\varepsilon_n} \cdot \mu_1 t^{\varepsilon_1} \mu_2 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}} \mu_n t^{\varepsilon_n} \cdot t^{-\varepsilon_n} \mu_n^{-1} \\ &= (\mu_n \phi^{-\varepsilon_n}(\mu_1) \mu_2) \cdot t^{\varepsilon_2} \mu_2 \cdots \mu_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}} \end{aligned}$$

En posant  $\mu'_1 = \mu_n \phi^{-\varepsilon_n}(\mu_1) \mu_2$

$$= \mu'_1 t^{\varepsilon_2} \cdots \mu_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}}$$

qui est dans  $K$ , et de longueur strictement inférieure à  $|\mu|$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

cas (i) Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $c \in C_{+1} \cup C_{-1}$ .

$$\gamma = h c h^{-1} \quad \text{où} \quad h = h_1 t^{\varepsilon_1} \cdots h_p t^{\varepsilon_p} h_{p+1}$$

et  $h$  est réduit. Nous raisonnons par induction sur  $|h|$ .

Si  $|h| = 1$ ,  $\gamma$  est conjugué à  $c$  par l'élément  $h = h_1$ , qui est dans  $A$ , et la conclusion est donc vérifiée.

Supposons que  $|h| > 1$ .

$$\begin{aligned} \gamma &= h c h^{-1} \\ &= h_1 t^{\varepsilon_1} \cdots h_p t^{\varepsilon_p} h_{p+1} c h_{p+1}^{-1} t^{-\varepsilon_p} \cdots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

Le membre de droite n'est pas réduit, et donc contient un pinch. Puisque  $h$  est réduit,  $t^{\varepsilon_p} h_{p+1} c h_{p+1}^{-1} t^{-\varepsilon_p}$  est un pinch, i.e.  $h_{p+1} c h_{p+1}^{-1} \in C_{\varepsilon_p}$ . On pose  $c_{2p} = c$ , et  $c_{2p-1} = h_{p+1} c h_{p+1}^{-1}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \cdots h_p t^{\varepsilon_p} c_{2p-1} t^{-\varepsilon_p} h_p^{-1} \cdots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ &= h_1 t^{\varepsilon_1} \cdots h_p \phi^{-\varepsilon_p}(c_{2p-1}) h_p^{-1} \cdots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

en posant  $c_{2p-2} = \phi^{-\varepsilon_p}(c_{2p-1}) \in C_{-\varepsilon_p}$

$$\begin{aligned}\gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{p-1}} h_p c_{2p-2} h_p^{-1} t^{-\varepsilon_{p-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ &= h' c_{2p-2} h'^{-1}\end{aligned}$$

en posant  $h' = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{p-1}} h_p$ . On a obtenu la suite  $(c_{2p-2}, c_{2p-1}, c_{2p} = c)$ , d'éléments de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , où

$$\begin{aligned}c_{2p-2} &= \phi^{-\varepsilon_p}(c_{2p-1}) \\ c_{2p-1} &= h_{p+1} \cdot c_{2p} \cdot h_{p+1}^{-1}\end{aligned}$$

Puisque  $\gamma = h' c_{2p-2} h'^{-1}$ , où  $|h'| < |h|$ , on peut procéder à l'induction, et ce faisant on construira la suite  $c_0, c_1, \dots, c_{2p}$ , d'éléments de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , vérifiant les conclusions du théorème.  $\square$

*cas (ii)* Si  $\gamma$  est conjugué à un élément  $\gamma' \in A$ , et n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ .

$$\begin{aligned}\gamma' &= h \gamma h^{-1} \\ &= h_1 \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} \gamma h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots h_1^{-1}\end{aligned}$$

qui est dans  $A$ , et donc soit  $n = 0$ , soit l'écriture n'est pas réduite. Or  $h$  est réduit, et donc, si  $n \neq 0$ ,  $t^{\varepsilon_n} h_{n+1} \gamma h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n}$  est un pinch, ce qui est impossible, puisque  $\gamma$  n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ . Donc  $n = 0$ , c'est à dire  $\gamma$  est conjugué à  $\gamma'$  dans  $A$ .  $\square$

*cas (iii)* Si  $\gamma$  est conjugué à un élément cycliquement réduit  $\gamma' = u_1 t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m}$

$$\gamma = h \gamma' h^{-1} = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} \gamma' h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

où  $h$  est réduit. Nous procédons par induction sur  $|h|$ .

Si  $|h| = 1$ .

$$\gamma = h_1 \gamma' h_1^{-1} = h_1 u_1 t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m} h_1^{-1}$$

Le membre de droite est réduit (car  $\gamma'$  est réduit), tandis que le membre de gauche  $\gamma$  est cycliquement réduit. Alors  $h_1^{-1}$ , et donc  $h_1$ , est dans  $C_{\mu_m}$ , et la conclusion est vérifiée.

Si  $|h| > 1$ .

$$\begin{aligned}\gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} \gamma' h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m} h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}\end{aligned}$$

et le membre de droite est de longueur supérieure à  $|\gamma|$ , et donc contient un pinch. Puisque  $h$  et  $\gamma'$  sont réduits, ce ne peut-être que  $t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1}$  ou  $t^{\mu_m} h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n}$ .

Si  $t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1}$  est un pinch.

Alors  $\varepsilon_n = -\mu_1$  et  $h_{n+1} u_1 = \alpha \in C_{\varepsilon_n}$

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1} \dots u_n t^{\mu_m} h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

en remplaçant  $h_{n+1} u_1$  par  $\alpha$ , et  $h_{n+1}^{-1}$  par  $u_1 \alpha^{-1}$

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h_n t^{\varepsilon_n} \alpha t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m} u_1 \alpha^{-1} t^{-\varepsilon_n} h_n^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h_n \phi^{-\varepsilon_n}(\alpha) u_2 \dots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{-\varepsilon_n} \phi^{-\varepsilon_n}(\alpha^{-1}) h_n^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h_n \phi^{-\varepsilon_n}(\alpha) u_2 \dots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{-\varepsilon_n} \phi^{-\varepsilon_n}(\alpha)^{-1} h_n^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

puisque  $\varepsilon_n = -\mu_1$ ,

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h_n \phi^{\mu_1}(\alpha) u_2 t^{\mu_2} \dots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{\mu_1} \phi^{\mu_1}(\alpha)^{-1} h_n^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

en posant  $h'_n = h_n \phi^{\mu_1}(\alpha)$ ,

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h'_n u_2 t^{\mu_2} \dots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{\mu_1} h_n'^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

et en posant  $h' = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h'_n$

$$\gamma = h' (u_2 t^{\mu_2} \dots u_m t^{\mu_m} u_1 t^{\mu_1}) h'^{-1}$$

Et alors  $\gamma$  s'obtient en conjuguant un conjugué cyclique de  $\gamma'$  par un élément réduit,  $h'$ , avec  $|h'| < |h|$ .

Si  $t^{\mu_m} h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n}$  est un pinch, alors  $h_{n+1} \in C_{\mu_m}$ , et  $\varepsilon_n = \mu_m$ .

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1} \dots u_m t^{\mu_m} h_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

après réduction

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} h_{n+1} u_1 t^{\mu_1} \dots u_m \phi^{-\mu_m}(h_{n+1})^{-1} h_n^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h_n \phi^{-\varepsilon_n}(h_{n+1}) t^{\varepsilon_n} u_1 t^{\mu_1} \dots u_m \phi^{-\mu_m}(h_{n+1})^{-1} h_n^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

en posant  $h'_n = h_n \phi^{-\mu_m}(h_{n+1})$

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h'_n t^{\varepsilon_n} u_1 t^{\mu_1} \dots t^{\mu_{m-1}} u_m h_n'^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

et  $h' = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h'_n$

$$\gamma = h' t^{\mu_m} u_1 \dots t^{\mu_{m-1}} u_m h'^{-1}$$

Remarquer que l'on a  $|h'| < |h|$ . Seulement  $t^{\mu_m}u_1 \dots t^{\mu_{m-1}}u_m$  n'est pas un conjugué cyclique de  $\gamma'$ , au sens où nous l'entendons. On distingue maintenant deux cas, selon si  $n = 1$ , ou  $n > 1$ .

Si  $n = 1$ . Puisque  $\gamma'$  est cycliquement réduit, l'élément  $h' t^{\mu_m}u_1 \dots t^{\mu_{m-1}}u_m h'^{-1}$  est réduit. Or il est égal à  $\gamma$  qui est cycliquement réduit, et donc,  $u_m h'^{-1} = \beta$  est un élément de  $C_{\mu_{m-1}}$ , ainsi,

$$\gamma = h' t^{\mu_m}u_1 \dots t^{\mu_{m-1}}u_m h'^{-1} = \beta^{-1}u_m t^{\mu_m}u_1 \dots t^{\mu_{m-1}} \beta$$

Et alors  $\gamma$  est conjugué à un conjugué cyclique de  $\gamma'$  par un élément de  $C_{\mu_{m-1}}$ .

Si  $n > 1$ .

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h'_n t^{\mu_m}u_1 t^{\mu_1} \dots t^{\mu_{m-1}}u_m h_n'^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

Le membre de droite est de longueur supérieure à  $|\gamma|$ , et donc contient un pinch. Puisque  $h'$ , et  $u_1 t^{\mu_1} \dots t^{\mu_{m-1}}u_m$  sont réduits, ce ne peut être que,  $t^{\varepsilon_{n-1}}h'_n t^{\mu_m}$ , ou  $t^{\mu_{m-1}}u_m h_n'^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}}$ . Or,  $t^{\varepsilon_{n-1}}h'_n t^{\mu_m}$  ne peut pas être un pinch. En effet, si c'est le cas, alors on a  $h'_n = h_n \phi^{-\mu_m}(h_{n+1}) \in C_{-\mu_m}$ , et donc, puisque  $\phi^{\mu_m}(h_{n+1}) \in C_{-\mu_m}$ ,  $h_n \in C_{-\mu_m}$ . En se rappelant que  $\mu_m = \varepsilon_n$ , on obtient que  $t^{\varepsilon_{n-1}}h_n t^{\varepsilon_n}$  est un pinch, ce qui contredit le fait que  $h$  soit réduit.

Ainsi  $t^{\mu_{m-1}}u_m h_n'^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1}}$  est un pinch. C'est à dire,  $\mu_{m-1} = \varepsilon_{n-1}$ , et  $u_m h_n'^{-1} = \beta \in C_{\mu_{m-1}}$ .

$$\gamma = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} h'_n t^{\mu_m}u_1 t^{\mu_1} \dots t^{\mu_{m-1}} \beta t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1}$$

en remplaçant  $h'_n$  par  $\beta^{-1}u_m$

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{n-1}} \beta^{-1} u_m t^{\mu_m}u_1 t^{\mu_1} \dots t^{\mu_{m-1}} \beta t^{-\varepsilon_{n-1}} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \\ \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h_{n-1} \phi^{-\varepsilon_{n-1}}(\beta)^{-1} t^{\varepsilon_{n-1}} u_m t^{\mu_m} \dots t^{\mu_{m-2}} u_{m-1} \phi^{-\mu_{m-1}}(\beta) h_{n-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_{n-1} = \mu_{m-1}$

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h_{n-1} \phi^{-\mu_{m-1}}(\beta)^{-1} t^{\varepsilon_{n-1}} (u_m t^{\mu_m} \dots t^{\mu_{m-2}} u_{m-1} t^{\mu_{m-1}}) \\ &\quad t^{-\varepsilon_{n-1}} \phi^{-\mu_{m-1}}(\beta) h_{n-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} h_1^{-1} \end{aligned}$$

et finalement, en posant  $h'' = h_1 t^{\varepsilon_1} \dots h_{n-1} \phi^{-\mu_{m-1}}(\beta)^{-1} t^{\varepsilon_{n-1}}$

$$\gamma = h'' (u_m t^{\mu_m} \dots t^{\mu_{m-2}} u_{m-1} t^{\mu_{m-1}}) h''^{-1}$$

et donc  $\gamma$  est conjugué, à un conjugué cyclique de  $\gamma'$ , par un élément  $h''$ , réduit, et  $|h''| < |h|$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $\gamma$  s'obtient à partir d'un conjugué cyclique de  $\gamma'$ , en conjuguant par un élément réduit,  $h'$  ou  $h''$ , de longueur strictement inférieure à  $|h|$ , ce qui nous permet d'appliquer l'induction. ■



**Démonstration du théorème 3.1.4**

cas (i) Il suffit d'appliquer le corollaire 3.1.2, après avoir remarqué que  $y$  conjugue  $x$  en  $x$ .  $\square$

cas (i') Il n'y a rien à prouver dans ce cas.  $\square$

cas (ii) On suppose que  $x$  est dans  $A$ . On a encore

$$\begin{aligned} x &= y x y^{-1} \\ x &= y_1 t^{\varepsilon_1} y_2 \cdots y_n t^{\varepsilon_n} y_{n+1} x y_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n} \cdots y_2^{-1} t^{-\varepsilon_1} y_1^{-1} \end{aligned}$$

qui est dans  $A$ , et donc le membre de droite n'est pas réduit. Or puisque  $x$  n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ ,  $t^{\varepsilon_n} y_{n+1} x y_{n+1}^{-1} t^{-\varepsilon_n}$  ne peut pas être un pinch, et donc, puisque  $y$  est réduit, la seule possibilité est  $n = 0$ , c'est à dire  $y \in A$ .

Si  $x$  est conjugué à un élément  $x_0 \in A$ ,  $x = h x_0 h^{-1}$ , alors  $h^{-1} y h$  commute avec  $x_0$ , et est donc dans  $A$ .  $\square$

Pour achever la démonstration, nous procédons par contradiction. Nous supposons qu'il existe  $x, y \in G$ , qui commutent, et qui ne vérifient pas les conclusions de la proposition. Alors, avec tout ce qui précède, ni  $x$  ni  $y$  n'est dans un conjugué de  $A$ . En particulier,  $x$  et  $y$  sont de longueur supérieure à 1.

On considère un élément  $x \in G$ , de longueur minimale, pour lequel il existe  $y \in G$ , tel que  $x$  et  $y$  commutent et ne vérifient pas les conclusions de la proposition. On prend  $y$  de longueur minimale dans l'ensemble des éléments vérifiant cette condition. On pose  $r + 1 = |x|, s + 1 = |y|$ ;  $x$  et  $y$  s'écrivent sous forme réduite :

$$\begin{aligned} x &= x_1 t^{\varepsilon_1} x_2 \cdots x_r t^{\varepsilon_r} x_{r+1} \\ y &= y_1 t^{\mu_1} y_2 \cdots y_s t^{\mu_s} y_{s+1} \end{aligned}$$

Bien sûr,  $0 < r \leq s$ .

Remarquons tout d'abord, que  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} x_1 t^{\varepsilon_1}$  n'est pas un pinch. En effet, dans le cas contraire,  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} x x_{r+1}^{-1} t^{-\varepsilon_r}$  est de longueur inférieure à  $|x|$ , et  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} x x_{r+1}^{-1} t^{-\varepsilon_r}$  et  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} y x_{r+1}^{-1} t^{-\varepsilon_r}$  commutent, et ne vérifient pas les conclusions de la proposition, ce qui est contradictoire, puisque l'on a supposé, que  $x$  était de longueur minimale.

Maintenant, soit  $xy$ , soit  $xy^{-1}$ , est sous forme réduite de longueur  $r + s + 1$ . Dans le cas contraire,  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} y_1 t^{\mu_1}$  et  $t^{-\varepsilon_1} x_1^{-1} y_1 t^{\mu_1}$  sont des pinches. Alors,  $\varepsilon_r = -\varepsilon_1$ , et  $x_{r+1} y_1, x_1^{-1} y_1 \in C_{\varepsilon_r}$ , et donc

$$x_{r+1} y_1 = c x_1^{-1} y_1$$

où  $c \in C_{\varepsilon_r}$ , et alors

$$x_{r+1} x_1 = c$$

et  $t^{\varepsilon_r} x_{r+1} x_1 t^{\varepsilon_1}$  est un pinch, ce qui est contradictoire.

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $xy$  est sous forme réduite de longueur  $r + s + 1$ . Ainsi,

$$xy = x_1 t^{\varepsilon_1} \cdots t^{\varepsilon_r} x_{r+1} y_1 t^{\mu_1} \cdots t^{\mu_s} y_{s+1} \quad (*)$$

$$= yx$$

$$= y_1 t^{\mu_1} \cdots t^{\mu_s} y_{s+1} x_1 t^{\varepsilon_1} \cdots t^{\varepsilon_r} x_{r+1} \quad (**)$$

et  $(*)$  et  $(**)$  sont deux écritures réduites de  $xy = yx$ . Avec le lemme de Britton, en supposant  $s \geq r$ ,

$$t^{\mu_{q+1}} y_{q+2} \cdots t^{\mu_s} y_{s+1} = c t^{\varepsilon_1} x_2 \cdots t^{\varepsilon_r} x_{r+1}$$

où  $q = s - r$ , et  $c \in C_{-\varepsilon_1}$ . Alors,

$$yx^{-1} = y_1 t^{\mu_1} \cdots t^{\mu_q} y_{q+1} c x_1^{-1}$$

est de longueur  $q + 1 = s - r + 1$ . Or,  $x$  et  $yx^{-1}$  commutent, et donc, puisque  $|yx^{-1}| < |y|$ , avec le choix que nous avons fait de  $x$  et  $y$ , nécessairement  $x$  et  $yx^{-1}$  vérifient les conclusions de la proposition.

Si  $yx^{-1}$  est conjugué à un élément  $c \in C_{+1} \cup C_{-1}$ ,

$$yx^{-1} = gcg^{-1}$$

et donc,

$$y = gcg^{-1} x$$

et puisque  $x = g1g^{-1}x$ ,  $x$  et  $y$  vérifient  $(iii)$ , ce qui est contradictoire.

Si  $yx^{-1}$  est dans un conjugué de  $A$ , et n'est pas conjugué à un élément de  $C_{+1} \cup C_{-1}$ , avec  $(ii)$ ,  $x$  et  $y$  sont dans le même conjugué de  $A$ , et vérifient donc  $(ii)$ , ce qui est contradictoire.

Si  $yx^{-1} = gcg^{-1}W^j$ , et  $x = gc'g^{-1}W^k$ , vérifient la conclusion  $(iii)$ , alors

$$\begin{aligned} y &= yx^{-1}x = gcg^{-1}W^j gc'g^{-1}W^k \\ &= gcg^{-1}gc'g^{-1}W^jW^k \\ &= gcc'g^{-1}W^{j+k} \end{aligned}$$

et puisque  $gcg^{-1}, gc'g^{-1}, W$  commutent deux à deux,  $gc'g^{-1}, gcc'g^{-1}$  et  $W$  commutent deux à deux. De plus  $c, c'$  sont dans  $C_{+1}$  (respectivement  $C_{-1}$ ), et donc  $cc'$  est dans  $C_{+1}$  (respectivement  $C_{-1}$ ). Ainsi,  $x$  et  $y$  vérifient la conclusion  $(iii)$ , ce qui est contradictoire. Il n'existe donc pas d'éléments  $x, y \in G$ , qui commutent et ne vérifient pas les conclusions de la proposition. Ceci termine la démonstration.  $\blacksquare$

# Chapitre 4

## Algorithmes dans le cas hyperbolique

Nous donnons dans ce chapitre, une solution aux algorithmes élémentaires dans le cas du groupe d'une variété hyperbolique de volume fini  $M$ . Nous utilisons principalement pour cela, la théorie des groupes hyperboliques de Gromov, et le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston.

La stratégie va consister à réduire les algorithmes dans les groupes fondamentaux de deux variétés hyperboliques fermées  $N_1, N_2$ , obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ . Les groupes  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$  étant hyperboliques au sens de Gromov, ils se prêtent particulièrement à la résolution d'algorithmes. L'obtention d'une solution dans  $\pi_1(M)$ , nécessite en outre que  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$  vérifient certaines conditions techniques supplémentaires. L'existence de telles variétés obtenues par obturation de Dehn sur  $M$  provient du théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston, qui établit l'existence d'une suite de variétés hyperboliques fermées, convergeant vers  $M$  pour la topologie géométrique.

Dans la première section, nous rappellerons, le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston (théorème 4.1.2), et la définition de la topologie géométrique. Dans la deuxième section, nous démontrerons les algorithmes qui nous seront nécessaires, dans un groupe hyperbolique au sens de Gromov. Enfin, nous résoudrons dans la dernière section, les algorithmes élémentaires dans le groupe d'une 3-variété hyperbolique de volume fini.

### 4.1 Convergence géométrique

Nous rappelons dans cette section, la construction de la topologie géométrique, et le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston. Pour tous les faits énoncés non démontrés, ou pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [BP], [CEG], et [Th1].

### 4.1.1 Définition de la topologie géométrique

**Définition 1** Soit  $X$  un espace topologique. On note  $F(X)$  l'ensemble des fermés de  $X$ . La **topologie de Chabauty**, sur  $F(X)$ , est la topologie admettant pour sous-base les ensembles de la forme suivante :

- 1)  $O_1(K) = \{A \in F(X) \mid A \cap K = \emptyset\}$  pour un compact  $K$ .
- 2)  $O_2(U) = \{A \in F(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$  pour un ouvert  $U$ .

La topologie de Chabauty vérifie de jolies propriétés.

**Proposition 4.1.1** Soit  $X$  un espaces topologique quelconque. On munit  $F(X)$  de la topologie de Chabauty. Alors,

- 1)  $F(X)$  est compact.
- 2) Si  $X$  est Hausdorff, localement compact, et a une base dénombrable d'ouverts, alors  $F(X)$  a une base dénombrable d'ouverts, et est métrisable (et donc Hausdorff).
- 3) Si  $X$  est compact et métrique, la topologie de chabauty sur  $F(X)$  est équivalente à la topologie induite par la distance de Hausdorff.

Cette topologie peut à première vue, sembler abstraite. La partie 3), de la proposition précédente, la rend déjà plus concrète. En outre, sous des hypothèses suffisantes, le résultat suivant montre que la notion de convergence dans cette topologie est très naturelle.

**Proposition 4.1.2** Soit  $X$  un espace métrisable, localement compact. Une suite  $(F_n)_n$  de  $F(X)$  converge vers  $F \in F(X)$  pour la topologie de Chabauty, si et seulement si :

- 1) Si  $x \in X$  est la limite d'une suite  $(x_n)_n$ , avec pour tout  $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$ , alors  $x \in F$ .
- 2) Donné  $x \in F$ , il existe une suite  $(x_n)_n$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$ , qui converge vers  $x$ .

Si  $G$  est un groupe de Lie, alors  $G$  est un espace Hausdorff, localement compact, et métrisable. On munit  $F(G)$  de la topologie de Chabauty. On note  $C(G)$  l'ensemble des sous-groupes fermés de  $G$ , et  $D(G)$  l'ensemble des sous-groupes discrets de  $G$ . Bien sûr,  $D(G) \subset C(G) \subset F(G)$ . On peut considérer les topologies induites par  $F(G)$  sur  $C(G)$  et  $D(G)$ . On vérifie alors, que  $C(G)$  est un fermé dans  $F(G)$ , et que  $D(G)$  est un ouvert dans  $C(G)$ . Ainsi  $C(G)$  est compact métrisable, muni d'une base dénombrable d'ouverts, et  $D(G)$  est localement compact, métrisable et muni d'une base dénombrable d'ouverts.

Cette topologie est très usuelle lorsque l'on considère des représentations dans un groupe de Lie. Soit  $(\Gamma_n)_n$  une suite de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie, on dit que  $(\Gamma_n)_n$  converge géométriquement vers  $\Gamma$ , si elle converge pour la topologie de Chabauty. Une suite de représentations discrètes dans  $G$ , converge géométriquement,

lorsque la suite de  $D(G)$  constituée de leur image, converge pour la topologie de Chabauty.

Nous nous restreignons maintenant au cas où  $G = PSL(2, \mathbb{C}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ . On note  $D_*(PSL(2, \mathbb{C}))$ , ou plus simplement  $D_*(I^+(\mathbb{H}^3))$ , l'ensemble des sous-groupes discrets sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . On munit  $D_*$  de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur  $F(PSL(2, \mathbb{C}))$ . On note  $\tau_C$  cette topologie. On construit une topologie pour les 3-variétés hyperboliques (complètes), en utilisant l'identification de  $D_*(I^+(\mathbb{H}^3))$  et de l'ensemble des 3-variétés hyperboliques (complètes), munies d'un repère. Nous ne pouvons pas procéder directement pour les 3-variétés hyperboliques, car la représentation d'holonomie n'est définie qu'au choix d'un repère près.

Nous avons besoin d'introduire les notations qui suivent. Soit  $\mathcal{H}$  l'espace des 3-variétés hyperboliques complètes. On note :

$$\mathcal{H}^* = \{(M, x) \in H \times M\}_{/\sim}$$

où  $(M, x) \sim (M', x')$  si il existe une isométrie  $\phi : M \longrightarrow M'$ , telle que  $\phi(x) = x'$ .

$$\mathcal{H}^{**} = \{(M, x, b)\}_{/\sim}$$

où  $M \in \mathcal{H}, x \in M$ , et  $b$  est une base orthonormale de  $T_x M$ , et où  $(M, x, b) \sim (M', x', b')$  si il existe une isométrie  $\phi : M \longrightarrow M'$ , telle que  $\phi(x) = x'$ , et  $b'$  est l'image de  $b$  par  $d\phi_x : T_x M \longrightarrow T_{x'} M'$ .

On a les surjections naturelles :

$$\mathcal{H}^{**} \xrightarrow{f_1} \mathcal{H}^* \xrightarrow{f_2} \mathcal{H}$$

Pour définir une topologie géométrique, on utilise le fait célèbre suivant :

**Proposition 4.1.3** *Fixons un point de base  $z_0$  de  $\mathbb{H}^3$ , et un repère orthonormal  $b_0$  de  $T_{z_0} \mathbb{H}^3$ . alors l'application :*

$$\Lambda : D_*(I^+(\mathbb{H}^3)) \ni \Gamma \longrightarrow (\mathbb{H}_{/\Gamma}^3, \pi(z_0), d_{z_0} \pi(b_0)) \in \mathcal{H}^{**}$$

(où  $\pi$  désigne l'application de revêtement), est une bijection.

**Définition 2** *La topologie géométrique pour  $\mathcal{H}^{**}$ , est la topologie  $\tau$  qui fait de*

$$\Lambda : (D_*(I^+(\mathbb{H}^3)), \tau_C) \longrightarrow (\mathcal{H}^{**}, \tau)$$

*un homéomorphisme.*

*Les topologies géométriques pour  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}$  sont les topologies les plus fines, pour lesquelles  $f_1$  et  $f_2$  sont continues.*

**Remarques :** – Il faut garder à l'esprit, qu'avec cette topologie, une suite  $(M_n)_n$  de  $\mathcal{H}$  converge vers  $M_0$ , si et seulement il existe  $(x_n)_n$  tel que la suite  $(M_n, x_n)$  de  $\mathcal{H}^*$  converge vers  $(M_0, x_0)$ , si et seulement si il existe  $(x_n)_n$ , et  $(b_n)_n$  tels que la suite  $(M_n, x_n, b_n)$  de  $\mathcal{H}^{**}$  converge vers  $(M_0, x_0, b_0)$ .

– On peut montrer que munis de ces topologies,  $\mathcal{H}^{**}$  est localement compact et Hausdorff,  $\mathcal{H}^*$  est Hausdorff, alors que  $\mathcal{H}$  n'est pas Hausdorff.

### 4.1.2 Caractérisation géométrique

Nous commençons par donner une caractérisation forte de la convergence géométrique. Soient  $x, y \in \mathbb{H}^3$ , on note  $P_{y,x} : T_y \mathbb{H}^3 \longrightarrow T_x \mathbb{H}^3$ , le transport parallèle le long du segment  $[y, x]$ , c'est à dire la valeur de la différentielle en  $y$ , de l'isométrie hyperbolique d'axe  $(x, y)$ , qui se décompose en une translation qui envoie  $y$  sur  $x$ , et une rotation d'axe  $(x, y)$  d'angle 0.

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{H}^3$ , et  $f, g$  des applications  $C^\infty$  sur un voisinage de  $K$ . On note  $d_n$  la  $n$ -ième différentielle, et pour  $x \in K$ , et  $n \geq 1$ , on considère l'application suivante :

$$P_{f(x),x} \circ d_n f(x) - P_{g(x),x} \circ d_n g(x)$$

On peut définir une distance entre  $f$  et  $g$  sur  $K$ , par :

$$\begin{aligned} D(f, g)_K &= \max_{x \in K} d(f(x), g(x)) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{1, \max_{x \in K} \|P_{f(x),x} \circ d_n f(x) - P_{g(x),x} \circ d_n g(x)\|\} \end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat suivant :

**Proposition 4.1.4** *Pour toute boule fermée  $\overline{B}$ , la topologie induite par  $D_{\overline{B}}$  sur  $I^+(\mathbb{H}^3) = PSL(2, \mathbb{C})$  est équivalente à la topologie usuelle.*

Soient  $(M, x_0, b) \in \mathcal{H}^{**}$ , et  $R, \varepsilon > 0$ , on définit  $V((M, x_0, b), R, \varepsilon)$  comme l'ensemble des variétés  $(N, y_0, c) \in \mathcal{H}^{**}$  vérifiant les propriétés suivantes. Si

$$\pi_M : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M, x_0) \quad \pi_N : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (N, y_0)$$

sont les applications de revêtement données par la proposition 4.1.3, Il existe une application  $f$ , lisse dans un voisinage  $U$  de  $\overline{B(z_0, R)} \subset \mathbb{H}^3$ , à valeur dans  $\mathbb{H}^3$ , telle que :

- (i)  $f(z_0) = z_0$
- (ii)  $f$  est équivariante, i.e.

$$\forall z_1, z_2 \in U, \quad \pi_M(z_1) = \pi_M(z_2) \iff \pi_N(f(z_1)) = \pi_N(f(z_2))$$

- (iii)  $D(f, Id)_{\overline{B(z_0, R)}} < \varepsilon$

On définit la topologie  $\tau_G$  sur  $\mathcal{H}^{**}$  comme la topologie admettant comme sous-base la classe des ensembles de la forme  $V((M, x_0, b), R, \varepsilon)$ . On peut démontrer que  $\{V((M, x_0, b), R, \varepsilon) \mid R, \varepsilon > 0\}$  est une base de voisinage de  $(M, x_0, b)$  dans  $(\mathcal{H}^{**}, \tau_G)$ .

**Proposition 4.1.5** *La topologie  $\tau_G$  sur  $\mathcal{H}^{**}$  est équivalente à la topologie géométrique.*

Afin de mieux appréhender la signification géométrique de cette convergence, remarquons que la boule centrée en  $x_0$ , de rayon  $R$  dans  $M$  est l'image par  $\pi_M$  de la boule de centre  $z_0$  et de rayon  $R$ , et que par équivariance,  $f$  passe au quotient en

une application  $\phi$  définie sur  $B(x_0, R) \subset M$ , à valeurs dans  $N$ , qui est  $k$ -bilipschitz, où  $k$  ne dépend que de  $\varepsilon$ , et  $k(\varepsilon) \rightarrow 1^+$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . L'application  $\phi$  envoie  $x_0$  sur  $y_0$  et  $b$  «près» de  $c$ , dans un sens fort.

Remarquons de plus que l'on peut montrer que si  $f$  est une application lisse sur un voisinage de  $\overline{B} = \overline{B(z_0, R)}$ , telle que  $f(z_0) = z_0$  et  $D(f, Id)_{\overline{B}} < \varepsilon$ , alors pour  $\varepsilon$  suffisamment petit  $f^{-1}$  est bien définie et lisse sur un voisinage de  $\overline{B'} = \overline{B(z_0, R')}$ , et  $D(f^{-1}, Id)_{\overline{B'}} < \varepsilon'$ , pour  $\varepsilon', R'$  ne dépendant que de  $R$  et  $\varepsilon$ , et vérifiant  $R' \rightarrow R$  et  $\varepsilon' \rightarrow 0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On peut utiliser  $f$  et  $f^{-1}$  pour montrer qu'il existe  $R > 0$ , tel que  $B(x_0, R) \subset M$  et  $B(y_0, R) \subset N$  sont  $(k, 0)$ -quasi-isométriques, avec  $k$  qui ne dépend que de  $\varepsilon$ , et  $k \rightarrow 1^+$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Cela permet d'introduire une définition (à priori plus faible) d'une topologie sur  $\mathcal{H}^{**}$ . Il s'avère (cf. [CEG]) que la topologie obtenue est encore équivalente à la topologie géométrique. Ainsi on aurait pu adopter une définition plus faible. Cependant, il est important de garder à l'esprit que ces applications bilipschitziennes, sont en fait induites par des applications équivariantes  $C^\infty$ -proches de l'identité sur  $B(z_0, R)$ .

### 4.1.3 Interprétation topologique de la convergence

Nous nous restreignons dans cette partie, au cas des variétés hyperboliques de volume fini. Nous rappelons le fait célèbre suivant (cf. [Ra]).

**Proposition 4.1.6** *Une variété hyperbolique  $M$ , est de volume fini, si et seulement si  $\partial M$  est soit vide, soit une réunion de tores.*

Nous noterons respectivement  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^{**}$ , les restrictions de  $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**}$ , aux variétés hyperboliques de volume fini. C'est à dire,  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des 3-variétés hyperboliques de volume fini,  $\mathcal{F}^*$  l'ensemble des 3-variétés hyperboliques de volume fini munies d'un point de base, et  $\mathcal{F}^{**}$  l'ensemble des 3-variétés hyperboliques munies d'un point de base  $x$  et d'un repère orthonormal de leur espace tangent en  $x$ . On munit ces ensembles des topologies induites par  $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**}$ .

Si  $M$  est une 3-variété hyperbolique complète, on peut fixer un repère, de façon à ce que  $M = \Lambda(\Gamma)$  avec les notations de la proposition 4.1.3. Rappelons que pour  $\varepsilon > 0$  donné, on définit la partie épaisse de  $M$ , notée  $M_{[\varepsilon, \infty]}$ , comme l'image par  $\pi_M$  de  $\{x \in \mathbb{H}^3 \mid \forall \gamma \in \Gamma, d(x, \gamma.x) \geq \varepsilon\}$ . La partie fine de  $M$ , notée  $M_{[0, \varepsilon]}$ , est le complémentaire de  $M_{[\varepsilon, \infty]}$  dans  $M$ . Il existe une constante uniforme (sur l'ensemble des 3-variétés hyperboliques),  $\mu$ , appelée constante de Margulis, telle que si  $\varepsilon < \mu$ , alors  $M_{[0, \varepsilon]}$  consiste en un nombre fini de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et de tubes de Margulis (cf. [Ra]).

**Proposition 4.1.7** *Soit  $(M_n, x_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{F}^*$ , convergeant vers  $(M_0, x_0) \in \mathcal{F}^*$ . Alors pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, et pour  $n \gg 0$ ,  $x_n \in M_{n[\varepsilon, \infty]}$ . Soit un  $\varepsilon > 0$  fixé; alors pour  $n \gg 0$ , il existe :*

- Une suite de réels strictement positifs,  $(\sigma_n)_n$ , t.q.  $\sigma_n \rightarrow 0$ .

- Une suite de réels,  $(k_n)_n$ ,  $k_n > 1$ , t.q.  $k_n \rightarrow 1$ .
- Pour tout  $n$ , une application  $k_n$ -bilipschitzienne,

$$\phi_n : M_{0[\varepsilon, \infty]} \longrightarrow M_n$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\phi_n$  est la restriction d'une application lisse sur un voisinage de  $M_{0[\varepsilon, \infty]}$ ; induite par une application équivariante  $C^\infty$  proche de l'identité.
- (ii)  $f_n(x_0) = x_n$ .
- (iii)  $M_{n[\varepsilon+\sigma_n, \infty]}$  est contenu dans l'intérieur de  $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$ , et  $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$  est contenu dans l'intérieur de  $M_{n[\varepsilon-\sigma_n, \infty]}$ .

Donnée  $M$ , on peut choisir  $\alpha(M)$ , avec  $0 < \alpha(M) < \mu$ , suffisamment petit, de façon à ce que pour tout  $\varepsilon < \alpha(M)$ , la partie  $\varepsilon$ -fine de  $M$  consiste en un nombre  $d \geq 0$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps. Ils sont en correspondance bi-univoque avec les composantes (toriques) de  $\partial M$ . En fait, pour  $\varepsilon < \alpha(M)$ ,  $M$  est homéomorphe à  $M_{[0, \varepsilon]}$ .

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, et  $n$  suffisamment grand, le complémentaire de  $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$  dans  $M_n$ , est contenu dans la partie  $\mu$ -fine de  $M_n$ , qui consiste en des  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et des tubes. Une étude topologique et géométrique simple, permet d'arriver aux résultats suivants :

**Théorème 4.1.1** *Soit  $(M_n)_n$  une suite de  $\mathcal{F}^{**}, \mathcal{F}^*$ , ou  $\mathcal{F}$ , convergeant vers  $M$  dans le même espace, ayant  $k$   $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps. Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, alors, pour  $n \gg 0$ , la partie  $\varepsilon$ -épaisse de  $M_n$  est homéomorphe à  $M$ . La suite  $M_n$  est partitionnée en  $k+1$  sous-suites (éventuellement finies),  $(M_n^{(h)})_n$ , pour  $h = 0 \dots k$ , où  $M_n^{(h)}$  a  $k-h$   $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et  $h$  tubes dans sa partie fine. De plus la longueur des géodésiques axiales des  $h$  tubes tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.*

On peut remarquer que la suite  $(M_n^{(0)})_n$  est stationnaire, égale à  $M$ . En particulier, les points de  $\mathcal{F}$  correspondant aux variétés fermées, sont isolés.

Sous une version corollaire, on obtient une interprétation topologique de la convergence géométrique.

**Corollaire 4.1.1** *Sous les mêmes hypothèses, pour  $n \gg 0$ ,  $M_n^{(h)}$  est obtenu par  $h$  obturations de Dehn sur  $M$ .*

#### 4.1.4 Convergence de représentation

Par définition, la suite  $(M_n)_n$  de  $\mathcal{F}$  converge vers  $M \in \mathcal{F}$  si il existe une suite  $(M_n, x_n, b_n)_n$  de  $\mathcal{F}^{**}$  qui converge vers  $(M, x_0, b_0)$ . Si l'on note  $\Gamma_n = \Lambda^{-1}((M_n, x_n, b_n))$  et  $\Gamma = \Lambda^{-1}(M, x_0, b_0)$ , alors par définition de la convergence géométrique, la suite  $(\Gamma_n)_n \subset PSL(2, \mathbb{C})$  converge géométriquement vers  $\Gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$ . On désire préciser cette notion de convergence.

Considérons une suite  $(M_n, x_n)$  de  $\mathcal{F}^*$  convergeant vers  $(M, x_0)$ . Alors pour  $n \gg 0$ , on a le plongement

$$\psi_n : (M, x_0) \longrightarrow (M_n, x_n)$$



donné par le corollaire 4.1.1, il n'est bien défini, qu'à homotopie près. On considère l'homomorphisme (bien défini),

$$\psi_{n*} : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow \pi_1(M_n, x_n)$$

Puisque  $M_n \setminus \psi_n(M)$  est constitué de tores solides, avec le théorème de Van-Kampen,  $\psi_{n*}$  est surjectif, et son noyau est normalement engendré par les classes des pentes de chirurgies.

Pour tout  $n$ , on a (donné  $b_n$ ), la représentation d'holonomie,

$$p_n : \pi_1(M_n, x_n) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

dont l'image est  $\Gamma_n$ . On considère (donné  $b_0$ ), la représentation d'holonomie,

$$P : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

dont l'image est  $\Gamma$ . La suite  $(\Gamma_n)_n$  converge géométriquement vers  $\Gamma$ . On construit la suite de représentations (non fidèles)  $(P_n)_n$ ,

$$P_n : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

en posant  $P_n = p_n \circ \psi_{n*}$ .

**Proposition 4.1.8** *Soit  $(M_n)_n$  une suite de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^*$ ,  $\mathcal{F}^{**}$ , convergeant vers  $M$ . La suite  $(P_n)_n$ , converge algébriquement vers  $P$ . C'est à dire, que pour tout élément  $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ , la suite  $(P_n(\gamma))_n$  converge vers  $P(\gamma)$  dans  $PSL(2, \mathbb{C})$ .*

On savait déjà que pour  $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ , il existe une suite  $(\gamma_n)_n$  où  $\gamma_n \in \Gamma_n = P_n(\pi_1(M, x_0))$  qui converge vers  $P(\gamma)$ . Cette proposition montre, que la suite  $(P_n(\gamma))_n$  converge vers  $P(\gamma)$ .

**Démonstration** Considérons une suite  $((M_n, x_n, b_n))_n$  de  $\mathcal{F}^{**}$  convergeant vers  $((M, x_0, b_0))$ . Fixons un repère de  $\mathbb{H}^3$ , et considérons les applications de revêtement données par la proposition 4.1.3,

$$\pi : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M, x_0)$$

$$\pi_n : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M_n, x_n)$$

et les représentations d'holonomie associées,

$$P : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

$$p_n : \pi_1(M_n, x_n) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

Comme précédemment, on note  $\Gamma_n = p_n(\pi_1(M_n, x_n))$ , et  $\Gamma = P(\pi_1(M, x_0))$ .

Soit  $\gamma \in \Gamma$ , on pose  $R > 2d(z_0, \gamma.z_0)$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  un arc géodésique de  $z_0$  à  $\gamma.z_0$ . Alors  $\pi(\tilde{\gamma})$  est un lacet fermé basé en  $x_0$ , de classe  $c$  dans  $\pi_1(M, x_0)$ , et  $\gamma = P(c)$ . Pour tout  $n$ , il existe une application  $f_n$  définie sur un voisinage de  $\overline{B(z_0, R)}$ , à valeur dans  $\mathbb{H}^3$ , équivariante, proche de l'identité, qui fixe  $z_0$ . Posons  $\tilde{\gamma}_n = f_n(\tilde{\gamma})$ ; alors,

par équivariance,  $\pi_n(\tilde{\gamma}_n)$  est un lacet fermé de  $M_n$ , basé en  $x_n$ . Notons  $c_n$  sa classe dans  $\pi_1(M_n, x_n)$ , et  $\gamma_n = p_n(c_n)$ . Alors, on vérifie sur un voisinage de  $z_0$ ,

$$f_n \circ \gamma = \gamma_n \circ f_n$$

et puisque  $f_n \rightarrow Id$ ;  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  sur  $\overline{B(z_0, R)}$  pour la topologie  $C^\infty$ , et donc, avec la proposition 4.1.4,  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  pour la topologie usuelle de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $R$  assez grand, tel que  $\pi(B(z_0, R)) \supset M_{[\varepsilon, \infty]}$ . On prend  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que,  $M_{[\varepsilon, \infty]}$  soit homéomorphe à  $M$ . Avec les notations du paragraphe précédent, on a un plongement (bilipschitzien),  $\psi_n$  de  $M_{[\varepsilon, \infty]}$  dans  $M_n$ , induit par  $f_n$ . Ainsi le lacet  $\psi_n(\pi(\tilde{\gamma}))$  est bien défini, et il s'agit en fait du lacet  $\pi_n(\tilde{\gamma}_n)$ . Remarquons que  $c_n = \psi_{n*}(c)$ , et qu'alors  $P_n(c) = p_n \circ \psi_{n*}(c) = \gamma_n$  converge vers  $P(c) = \gamma$ . ■

### 4.1.5 Théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston

Dans la section précédente, nous avons déduit des conditions nécessaires, pour qu'une suite de variétés hyperboliques de volume fini converge, mais nous ne nous sommes pas assuré de leur existence. Pour cela, nous disposons du théorème de chirurgie de Thurston.

Rappelons que pour des entiers naturels, on note  $p \wedge q = 1$  si, soit  $p$  et  $q$  sont non nuls, et premiers entre eux, soit l'un est nul, et l'autre est égal à  $\pm 1$ . Soit  $M$  une 3-variété à bord non vide, et  $\mathcal{T} \subset \partial M$  un tore. Une fois fixée une base de  $\pi_1(\mathcal{T})$ , la classe d'homéomorphisme de la variété obtenue par obturation de Dehn sur  $\mathcal{T}$ , ne dépend que des coefficients  $(p, q)$  de chirurgie ou pente de chirurgie), où  $p \wedge q = 1$ . Posons que la chirurgie sur  $\mathcal{T}$  de coefficient  $\infty$  consiste à retirer la composante au bord  $\mathcal{T}$ . Posons  $D = \{(p, q) | p \wedge q = 1\}$  et  $\overline{D} = D \cup \{\infty\}$ ;  $\overline{D}$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $S^2$ . En effet  $D$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , et en considérant la compactification de  $\mathbb{R}^2$  en  $S^2$  par projection stéréographique qui envoie le pôle nord sur  $\infty$ ,  $\overline{D}$  se plonge dans  $S^2$ . Remarquons, qu'avec la topologie usuelle de  $S^2$ , si  $U$  est un voisinage de  $\infty$ , alors tous les points de  $\overline{D}$ , à l'exception d'un nombre fini, sont dans  $U$ . On munit  $\overline{D}$  de la topologie induite.

Si  $M$  a  $q$  composantes toriques au bord,  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$ , une obturation de Dehn (au sens large) sur  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$ , est déterminée par un élément de  $\overline{D}^q = \overline{D} \times \dots \times \overline{D}$ . On munit cet espace de la topologie produit.

**Théorème 4.1.2** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de volume fini, ayant  $k$  composantes (toriques) au bord,  $k \geq 1$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $(\infty, \dots, \infty)$  dans  $\overline{D}^k$ , tel que si  $(d_1, \dots, d_k) \in U$ , alors  $M_{(d_1, \dots, d_k)}$  est hyperbolique de volume fini. De plus l'ensemble de toutes les 3-variétés hyperboliques obtenues de cette façon, contient des sous-suites non triviales convergeant vers  $M$ .*

**Remarques :** – Par une suite non triviale, nous entendons une suite qui n'est pas stationnaire au bout d'un certain rang.

– La première partie de ce résultat est souvent résumée sous la forme «presque

toutes» les 3-variétés obtenues par chirurgie sur une variété hyperbolique sont hyperboliques. Mais attention au sens de «presque toutes». Si  $M$  n'a qu'une composante au bord (le complément d'un noeud dans une variété fermée), alors «presque toutes» signifie «toutes sauf un nombre fini»; mais si  $M$  a plusieurs composantes, le complémentaire de  $U$  peut être de cardinalité infinie.

**Corollaire 4.1.2** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, à bord non vide. Il existe une suite non triviale  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variétés hyperboliques fermées convergeant vers  $M$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n$  s'obtient par obturation de Dehn sur  $M$ .
- Si  $\mathcal{T}$  est une composante de  $\partial M$ ,  $l_i, l_j$  les pentes respectives sur  $\mathcal{T}$  pour  $M_i, M_j$ , alors si  $i \neq j$ ,  $l_i \neq l_j$ .

**Remarque :** Si  $M$  est fermée, toute suite  $(M_n)_n$ , convergeant vers  $M$  est stationnaire au bout d'un certain rang.

**Démonstration** Nous commençons par montrer l'existence d'une suite de variétés hyperboliques fermées, obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , convergeant vers  $M$ . Nous procédons par récurrence sur le nombre  $k$  de composantes au bord de  $M$ .

Si  $k = 1$ , le théorème de chirurgie hyperbolique fournit une suite  $(M_n)_n$  convergeant vers  $M$ . La sous-suite  $(M_n)_n^{(0)}$  (avec les notations du théorème 4.1.1) est stationnaire, or, puisque  $(M_n)_n$  est non triviale, la suite  $(M_n)_n^{(1)}$  est infinie, c'est donc une suite extraite et donc elle converge vers  $M$ .

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang  $k$ . Soit  $M \in \mathcal{F}$  ayant  $k + 1$  composantes au bord, et  $(M_n)_n$  une suite de  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $M$ . Comme précédemment, en considérant une suite extraite, on peut supposer que  $(M_n)_n^{(0)}$  est vide. Soit  $(M_{\phi_n})_n$  la sous-suite de  $(M_n)_n$  constituée des éléments  $M_n$  non fermés.

Par hypothèse de récurrence, pour chaque  $n$ ,  $M_{\phi_n}$  est la limite d'une suite de variétés fermées de  $\mathcal{F}$ ,  $(F_p^n)_p$ .

En remplaçant dans  $(M_n)_n$ , pour tout  $n$ ,  $M_{\phi_n}$  par un  $F_p^n$  suffisamment proche, il est aisé de construire (abstraitement), une suite de variétés fermées de  $\mathcal{F}$ , convergeant vers  $M$ .

Soit maintenant  $\mathcal{T}$  une composante au bord de  $M$ . On note  $l_n$  la pente de chirurgie sur  $\mathcal{T}$  pour  $M_n$ . Donnée une pente  $l$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un nombre fini de pentes  $l_n$  égales à  $l$ . En effet supposons le contraire, alors il existe une suite extraite  $M_{\sigma(n)}$ , dont toutes les pentes de chirurgie sur  $\mathcal{T}$  sont égales à  $l$ . On fixe  $[l]$ , la classe de  $l$  dans  $\pi_1(M)$ . Avec les notations de la proposition 4.1.8, la suite  $P_{\sigma(n)}([l])$  converge vers  $P([l])$  dans  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Or, par définition d'une obturation de Dehn, pour tout  $n$   $P_{\sigma(n)}([l]) = 1$  dans  $PSL(2, \mathbb{C})$ , ainsi  $P([l]) = 1$  dans  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Alors, puisque  $P$  est une représentation fidèle,  $[l] = 1$  dans  $\pi_1(M)$ , ce qui est impossible puisque  $\mathcal{T}$  est incompressible.

Nous allons maintenant construire une suite extraite de  $M_n$ , vérifiant pour  $\mathcal{T}$  fixé les conclusions du corollaire. Soit  $p \geq 1$ , tel que toutes les pentes  $l_1, \dots, l_p$  sur  $\mathcal{T}$  soient distinctes. Avec ce qui précède, il existe  $\mu$  tel que pour tout  $n \geq \mu$ ,  $l_n$  est distinct de  $l_1, \dots, l_p$ . Posons  $N_1 = M_1, \dots, N_p = M_p$ ,  $N_{p+1} = M_\mu$ . En répétant ce

procédé on montre l'existence d'une suite extraite vérifiant pour  $\mathcal{T}$  fixé, les conclusions du corollaire. On procède de la même façon pour toutes les composantes au bord de  $M$ , et on obtient ainsi la suite extraite désirée. ■

## 4.2 Algorithmes dans un groupe $\delta$ -hyperbolique

### 4.2.1 Définition d'un groupe hyperbolique au sens de Gromov

Nous commençons par définir la notion de groupe hyperbolique selon Gromov (cf. [Gr], [CDP], [GdlH], [GHVS]). Pour cela nous équipons un groupe arbitraire d'une métrique, appelée métrique du mot. Cette métrique dépend d'une famille génératrice du groupe. Néanmoins, pour des groupes de type fini, nous verrons que la propriété d'hyperbolicité ne dépend pas d'une famille génératrice finie. Pour cette raison, nous nous restreindrons dans la suite à des groupes de type fini.

Il existe de multiples façon équivalentes de définir la notion de groupe hyperbolique. Initialement, M. Gromov définit sa notion d'hyperbolicité pour un espace métrique quelconque, en introduisant un produit (appelé depuis produit de Gromov). Il dit alors qu'un groupe est hyperbolique, si muni de la métrique du mot, il est hyperbolique en tant qu'espace métrique. Il généralise ainsi le cas du groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative.

Nous avons choisi d'utiliser la caractérisation de l'hyperbolicité dans un espace géodésique, par des «triangles fins». Nous devons dès lors, pour définir l'hyperbolicité d'un groupe, le plonger isométriquement dans un espace métrique géodésique. Nous introduisons pour cela la notion de graphe de Cayley d'un groupe. C'est un espace géodésique propre, sur lequel le groupe agit par isométrie de façon proprement discontinue et cocompacte.

Soit  $G$  un groupe de type fini, et  $S$  une famille génératrice finie pour  $G$ . On définit une distance sur  $G$ , appelée **métrique du mot**, de la manière suivante :

Soit  $\omega$  un mot sur  $S$ , i.e.  $\omega \equiv a_1 \cdots a_i \cdots a_n$ , avec pour tout  $i = 1 \cdots n$ ,  $a_i \in S \cup S^{-1}$ , nous notons  $lgr_S(\omega)$ , la longueur de  $\omega$  en tant que mot, c'est à dire l'entier  $n$ .

Soit  $g$  un élément de  $G$ . On définit l'entier  $|g|$  par,

$$|g| = \inf\{lgr_S(\omega) \mid \omega \text{ est un mot représentant } g\}$$

Remarquons que puisque l'on considère la borne inférieure d'un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{N}$ , cette borne est atteinte, c'est à dire qu'il existe un mot  $\omega$  de longueur  $|g|$ , représentant  $g$  (il n'est en général pas unique). Nous définissons alors une distance sur  $G$ , en posant pour tout  $g_1, g_2 \in G$ ,

$$d_S(g_1, g_2) = |g_1^{-1}g_2|$$

Il est trivial de vérifier les axiomes de symétrie, de séparation, et l'inégalité triangulaire. Il faut remarquer que cette définition dépend d'une famille génératrice.

Lorsqu'une famille génératrice  $S$  sera supposé fixée, nous aurons coutume de noter  $lgr$  et  $d$  au lieu de  $lgr_S$  et  $d_S$ . Nous commettrons aussi l'abus de langage consistant à noter  $|\omega|$  pour un mot  $\omega$ . Plus généralement, donné un mot, nous le confondrons souvent avec l'élément qu'il représente dans le groupe.

Soit  $G$  un groupe muni d'une famille génératrice finie. On définit un graphe orienté, localement fini, appelé le **graphe de Cayley**, noté  $\Gamma(G, S)$  de la façon suivante :

- Les sommets de  $\Gamma(G, S)$  sont en bijection avec les éléments de  $G$ . Si  $g \in G$ , on note  $\bar{g}$  le sommet de  $\Gamma(G, S)$  lui correspondant.
- Il existe une arête ayant pour origine  $\bar{g}_1$  et pour extrémité  $\bar{g}_2$ , lorsque il existe  $s \in S \cup S^{-1}$  tel que  $g_2 = g_1.s$  dans  $G$ . On munit alors cette arête du label  $s$ . Trivialement, si une arête  $\alpha$  est labellée par  $s$ , son arête opposée  $-\alpha$  sera labellée par  $s^{-1}$ .

Etant donné deux sommets  $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ , un chemin de  $\bar{g}_1$  à  $\bar{g}_2$  est une suite finie d'arêtes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , telle que  $\bar{g}_1$  est l'origine de  $\alpha_1$ ,  $\bar{g}_2$  est l'extrémité de  $\alpha_n$ , et pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ , l'extrémité de  $\alpha_i$  est l'origine de  $\alpha_{i+1}$ . Un chemin est alors naturellement muni d'un label. C'est le mot  $\omega$  sur  $S$  obtenu par concaténation des labels des arêtes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , *i.e.*  $\omega \equiv s_1 \cdots s_i \cdots s_n$ , où  $s_i$  est le label de  $\alpha_i$ . On a alors dans  $G$  la relation  $g_2 = g_1\omega$ . Il faut remarquer que donné un sommet, l'ensemble des chemins ayant pour origine ce sommet est en bijection avec l'ensemble des mots sur  $S$ .

Un chemin bi-infini, est une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'arêtes, telle que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , l'extrémité de  $\alpha_i$  est l'origine de  $\alpha_{i+1}$ .

On munit  $\Gamma(G, S)$  d'une métrique simpliciale, en imposant que la longueur d'une arête soit égale à 1. Cela fait de  $\Gamma(G, S)$  un espace métrique géodésique propre. Avec cette métrique, l'ensemble des sommets muni de la métrique induite, est naturellement isométrique à  $(G, d_S)$ . Si un chemin ayant pour label  $\omega$  est une géodésique, on dira que  $\omega$  est un mot géodésique.

Soit  $g \in G$ . Si  $\bar{h}$  est un sommet, on définit  $g.\bar{h}$  comme le sommet  $\overline{gh}$ , et si  $\alpha$  est l'arête de label  $s$ , entre  $\bar{h}_1$  et  $\bar{h}_2$ ,  $g.\alpha$  est l'arête de label  $s$  entre  $g.\bar{h}_1$  et  $g.\bar{h}_2$ . On définit ainsi une action  $G \times \Gamma(G, S) \longrightarrow \Gamma(G, S)$ . Cette action se fait par isométrie. Si l'on considère un chemin  $\mathcal{C}$ , son image sous l'action de  $g \in G$  est encore un chemin, que l'on note  $g.\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C}$  est un chemin de  $\bar{g}_1$  à  $\bar{g}_2$ , alors  $g.\mathcal{C}$  va de  $\overline{gg_1}$  à  $\overline{gg_2}$  et a même label que  $\mathcal{C}$ .

Le graphe de Cayley d'un groupe peut aussi se définir de manière plus concrète. Soit  $G$  un groupe admettant la présentation finie  $\langle S \mid R \rangle$ . Il existe une façon standard de construire un 2-complexe simplicial fini, ayant un sommet, une arête pour chaque élément de  $S$ , et pour groupe fondamental  $G$ . Considérons son revêtement universel  $\tilde{K}$ , et fixons un point de base. Alors le 1-squelette  $K^1$  de  $\tilde{K}$  est naturellement isomorphe au graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ . L'action précédemment définie, est la restriction sur  $K_1$  de l'action de  $G$  sur  $\tilde{K}$  comme groupe d'automorphisme du revêtement. Il est alors clair que  $G$  agit de façon libre et proprement discontinue sur  $\Gamma(G, S)$ . L'action est cocompacte, car l'espace quotient est le 1-squelette de  $K$ .

Nous en arrivons maintenant à la définition de l'hyperbolicité selon Gromov. Soit  $E$  un espace métrique géodésique. Nous appelons triangle géodésique  $[x, y, z]$ , la donnée de 3 points distincts  $x, y, z$  de  $E$ , et de géodésiques les reliant deux à deux,  $[x, y], [y, z], [x, z]$  (elles ne sont en général pas uniques).

Etant donné un triangle géodésique  $[x, y, z]$  de  $E$ , on peut toujours le plonger isométriquement dans un triangle  $[A, B, C]$  de l'espace euclidien 2-dimensionnel. Ap-

posons  $\Psi$  l'isométrie  $\Psi : [x,y,z] \longrightarrow [A,B,C]$ , telle que  $\Psi(x) = A, \Psi(y) = B, \Psi(z) = C$ .

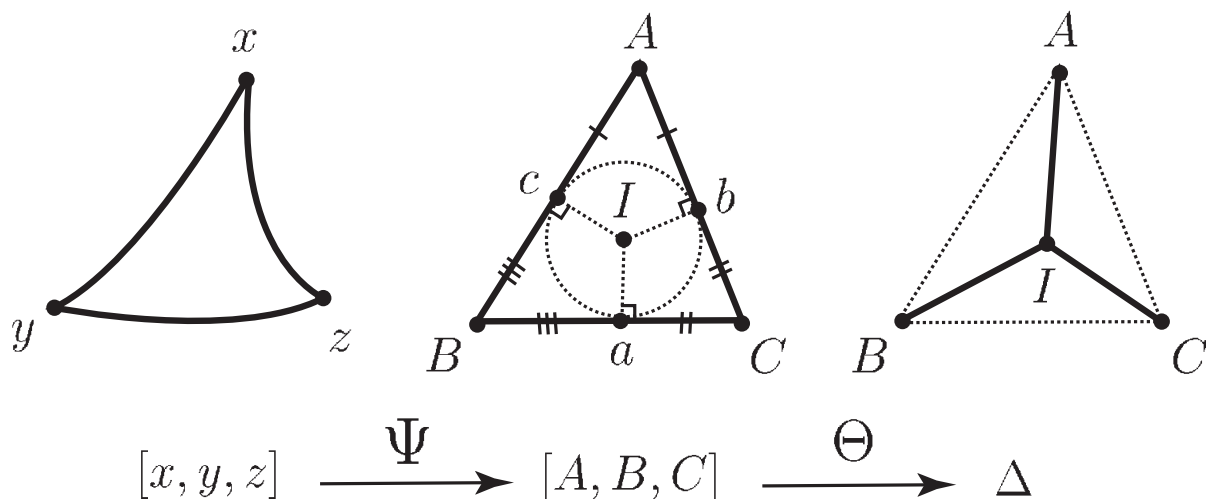
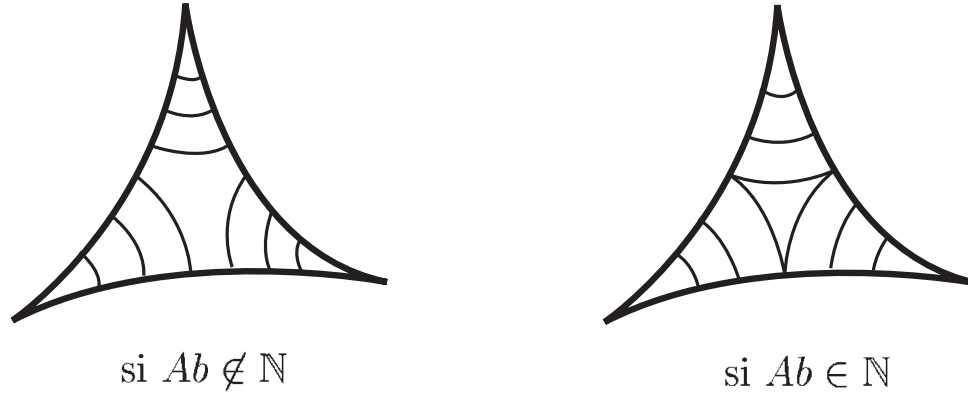


FIG. 4.1 – Le tripôde  $\Delta$  et l'application  $\Theta \circ \Psi$ .

Notons  $I$  le centre du cercle inscrit dans  $[A,B,C]$ , et  $a,b,c$  ses points de contact (voir la figure 5.1). Considérons le tripôde  $\Delta$  constitué des segments  $[A,I], [B,I], [C,I]$ . On construit l'application continue  $\Theta$  de  $[A,B,C]$  dans  $\Delta$  de la façon suivante: la restriction de  $\Theta$  sur  $[A,c]$  est l'unique application affine qui préserve  $A$ , et qui envoie  $c$  sur  $I$ . De la même façon, la restriction de  $\Theta$  sur  $[A,b]$  est l'application affine qui préserve  $A$  et envoie  $b$  sur  $I$ . On définit de façon similaire  $\Theta$  sur  $[C,b], [C,a], [B,a], [B,c]$ . Ceci définit  $\Theta$  sur  $[x,y,z]$ . Remarquons que  $\Theta$  est bijective sur  $A,B,C$ , la pré-image de  $I$  est  $\{a,b,c\}$ , et que tout autre point admet deux pré-images. On construit ainsi l'application  $\Theta \circ \Psi$  de  $[x,y,z]$ , qui est unique, à composition par une isométrie du plan, près. Soit  $\delta \in \mathbb{R}_+$ . Nous dirons que  $E$  est  **$\delta$ -hyperbolique**, si pour tout triangle géodésique, et pour tout point  $m \in \Delta$  (où  $\Delta$  est obtenu par cette construction), le diamètre de  $(\Theta \circ \Psi)^{-1}(m)$  dans  $E$  est majoré par  $\delta$ . Nous dirons que  $E$  est **hyperbolique** si il existe  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , tel que  $E$  soit  $\delta$ -hyperbolique.

Un groupe de type fini  $G$ , muni d'une famille génératrice  $S$  sera dit  **$\delta$ -hyperbolique**, si son graphe de Cayley  $\Gamma(G,S)$  est  $\delta$ -hyperbolique. Cette définition dépend du choix de  $S$ . Néanmoins, si  $S'$  est une autre famille génératrice finie pour  $G$ , et si  $\Gamma(G,S)$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors  $\Gamma(G,S')$  est  $\delta'$ -hyperbolique pour un certain  $\delta'$ . Nous dirons qu'un groupe est **hyperbolique** si pour une (toute) famille génératrice  $S$  finie, il existe un réel positif  $\delta$  tel que  $\Gamma(G,S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique. Ainsi être hyperbolique ne dépend pas du choix d'une famille génératrice finie.

Considérons un groupe  $\delta$ -hyperbolique  $G$ , et  $\Gamma(G,S)$  son graphe de Cayley pour cette famille génératrice. Soit  $[x,y,z]$  un triangle géodésique dans  $\Gamma(G,S)$ . Soit  $\Delta$  le tripôde, et l'application  $\Theta \circ \Psi$ , comme définis plus haut. Par définition, si  $u,v$  sont deux sommets dans  $[x,y,z]$ , ayant même image par  $\Theta \circ \Psi$ , alors ils sont reliés dans  $\Gamma(G,S)$  par un chemin de longueur au plus  $\delta$ . La donnée d'un chemin géodésique

FIG. 4.2 – *Foliation d'un triangle géodésique dans le graphe de Cayley.*

pour tout couple de sommet de  $[x, y, z]$  ayant même image par  $\Theta \circ \Psi$ , s'appelle une **foliation** de  $[x, y, z]$ .



### 4.2.2 Premières propriétés

Nous avons défini dans la section précédente, les groupes hyperboliques. Nous ne rappellerons pas leurs propriétés élémentaires. Concernant leur étude, et toutes les propriétés utilisées dans cette section, nous renvoyons l'intéressé aux ouvrages de références [CDP], [GdlH]. Nous citons néanmoins le résultat suivant, qui sera utilisé tout au long de cette section.

**Proposition 4.2.1** *Dans un groupe hyperbolique, les problèmes du mot et de la conjugaison sont résolubles.*

Rappelons maintenant la définition d'une quasi-géodésique. Soit  $c$  un chemin (fini ou infini) dans le graphe de Cayley. Soient des réels  $\lambda \geq 1$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Nous dirons que  $c$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -**quasigéodésique**, si pour tout sous-chemin  $c'$  de  $c$ , si  $u$  est le label de  $c'$ , alors,

$$lgr(u) \leq \lambda|u| + \varepsilon$$

Un chemin sera dit **quasigéodésique** si c'est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésique, pour  $\lambda \geq 1, \varepsilon \geq 0$ . Nous appellerons quasigéodésique infinie, un chemin bi-infini, qui est une quasigéodésique.

Nous commencerons par démontrer la propriété algébrique majeure des groupes hyperboliques. Elle nous sera utile tout au long de cette section.

**Proposition 4.2.2** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique et  $h \in G$  un élément sans torsion. Supposons qu'il existe  $a \in G$  et  $p, q \in \mathbb{Z}$ , tels que*

$$h^q = ah^pa^{-1} \quad \text{dans } G$$

*Alors  $p = \pm q$ . De plus,  $\langle a \rangle_G$  est une extension finie d'un sous-groupe de  $\langle h \rangle_G$ .*

**Démonstration** Montrons tout d'abord, que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h^{q^n} = a^n h^{p^n} a^{-n}$ .

$$\begin{aligned} a^n h^{p^n} a^{-n} &= a^{n-1} (aha^{-1})^{p^n} a^{1-n} \\ &= a^{n-1} (ah^p a^{-1})^{p^{n-1}} a^{1-n} \\ &= a^{n-1} h^{q \times p^{n-1}} a^{1-n} \\ &= a^{n-2} (ah^p a^{-1})^{q \times p^{n-2}} a^{2-n} \\ &= a^{n-2} h^{q^2 \times p^{n-2}} a^{2-n} \\ &= \dots \\ &= a^{n-k} (ah^p a^{-1})^{q^{k-1} \times p^{n-k}} a^{k-n} \\ &= a^{n-k} h^{q^k \times p^{n-k}} a^{k-n} \\ &= \dots \\ &= ah^{q^{n-1} \times p} a^{-1} \\ &= (ah^p a^{-1})^{q^{n-1}} \\ &= h^{q^n} \end{aligned}$$

On se place maintenant dans le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ , pour  $S$  une famille génératrice. On suppose que pour cette famille  $G$  est  $\delta$ -hyperbolique.

Notons  $[\bar{1}, \bar{h}]$ , un chemin géodésique entre  $\bar{1}$  et  $\bar{h}$ , et considérons le chemin infini  $\mathcal{H}$  défini par  $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}]$ . Remarquons que les sommets  $\bar{h}^n$  sont dans  $\mathcal{H}$ . Puisque  $h$  est sans torsion, avec le lemme 10.6.5 de [CDP],  $\mathcal{H}$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésique, avec  $\lambda, \varepsilon$  ne dépendant que de  $h$ . Ainsi  $\mathcal{H}$  admet deux points limites  $h_-$  et  $h_+$ , et si nous notons  $[h_-, h_+]$  une géodésique de  $h_-$  à  $h_+$ , alors  $[h_-, h_+]$  est dans le  $K$ -voisinage de  $\mathcal{H}$ , avec  $K$  ne dépendant que de  $\lambda, \varepsilon$  et  $\delta$  (théorème 3.3.1 de [CDP]).

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , considérons  $\mathcal{H}_n = a^n \cdot \mathcal{H}$ , image de  $\mathcal{H}$  sous l'action de  $a^n \in G$ . Puisque  $G$  agit par isométrie,  $\mathcal{H}_n$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésique, pour tout  $n$ . Puisque  $h^{p^n} = a^n h^{q^n} a^{-n}$  dans  $G$ , les quasi-géodésiques  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}_n$  restent à une distance bornée (dépendant de  $p, q, n, |a|, |h|$ ). Avec le corollaire 2.1.3 de [CDP],  $\mathcal{H}_n$  a alors pour points limites  $h_-$  et  $h_+$ , et avec le théorème 3.3.1 de [CDP], pour tout  $n$ ,  $[h_-, h_+]$  est dans le  $K$ -voisinage de  $\mathcal{H}_n$ .

Considérons un point  $\bar{x}$  de  $[h_-, h_+]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe un chemin de  $\bar{x}$  à un point de  $\mathcal{H}_n$ , de longueur au plus  $K$ ; et donc pour tout  $n$ , il existe un entier  $i$ , et un chemin de  $\bar{x}$  à  $a^n h^i$ , de longueur au plus  $K + |h|$ . Ainsi la boule fermée centrée en  $\bar{x}$  de rayon  $K + |h|$ , contient pour tout entier  $n$ , un sommet de la forme  $a^n h^i$ , pour un certain  $i \in \mathbb{Z}$ . Puisque le graphe est localement fini, une boule contient un nombre fini de sommets. Ainsi, il existe  $n, m, i, j$ , avec  $n \neq m$ , tels que  $a^n h^i = a^m h^j$  dans  $G$ . Et donc, il existe  $r \in \mathbb{Z}^*, s \in \mathbb{Z}$ , tels que

$$a^r = h^s$$

Il est alors clair que  $\langle h^s \rangle_G$  est un sous-groupe d'indice fini de  $\langle a \rangle_G$ . De plus,  $a^r$  et  $h$  commutent, et donc,

$$h^{p^r} = a^r h^{p^r} a^{-r} = h^{q^r}$$

ce qui, puisque  $h$  est sans torsion, n'est possible que si  $p = \pm q$ . ■

**Remarques :** – On obtient alors le corollaire suivant : un groupe hyperbolique ne peut pas contenir  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , et plus généralement, aucun groupe de Baumslag-Solitar  $\langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ , pour  $p, q \in \mathbb{Z}$  (si  $p = \pm q$  on peut facilement montrer — en utilisant par exemple la structure d'extension HNN — que l'on n'a pas  $a^n = b^m$  pour  $n, m \in \mathbb{Z}$ ).

– On peut montrer sur le même modèle que l'ensemble  $C$  des éléments de  $G$  qui préservent l'ensemble  $\{h_-, h_+\}$  est une extension finie de  $\langle h \rangle$ . En particulier, le centralisateur d'un élément  $h$  sans torsion, contient le sous-groupe cyclique infini engendré par  $h$  comme sous-groupe d'indice fini.

### 4.2.3 Les algorithmes

L'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 4.2.2, pour montrer que  $[h_-, h_+]$  est dans le  $K$ -voisinage de  $\mathcal{H}_n$  (les deux premiers paragraphes du second argument) sera récurrent tout au long de cette section. Il nous permettra de

déterminer des bornes sur la longueur d'éléments vérifiant les relations algébriques étudiées. Ces bornes seront calculables, et ne dépendront que de grandeurs liées au groupe, et de paramètres de quasigéodésicité. Le problème qui se pose est alors le suivant : si  $h$  est un élément sans torsion de  $G$  hyperbolique, alors le chemin bi-infini  $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}]$  est une quasigéodésique. Peut-on, donné un mot sur les générateurs représentant  $h$ , déterminer algorithmiquement les paramètres  $\lambda, \varepsilon$  de quasigéodésité de  $\mathcal{H}$ ?

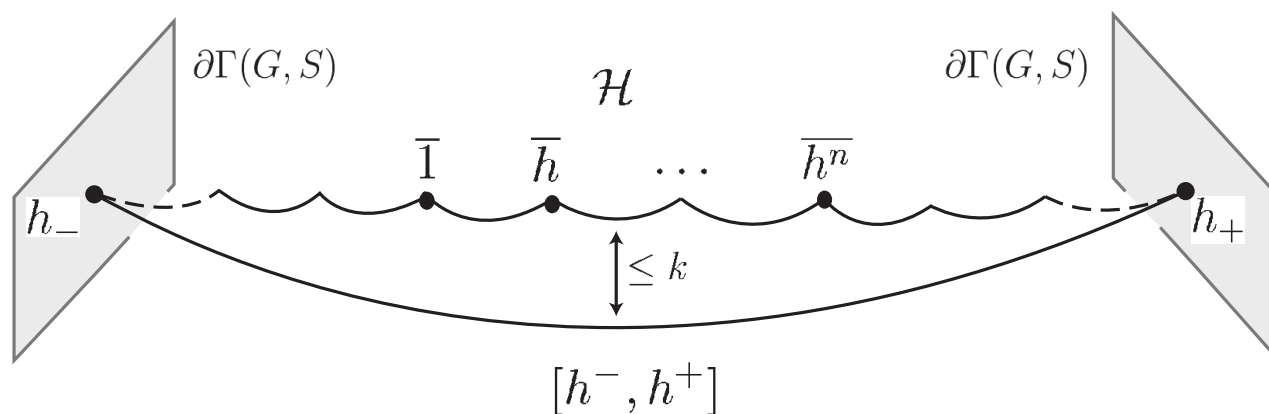


FIG. 4.3 – La  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique  $\mathcal{H}$ . Elle admet deux points limites  $h^-, h^+$  dans  $\partial\Gamma(G, S)$ , et reste à distance de Hausdorff au plus  $k$  de toute géodésique  $[h^-, h^+]$ , où  $k$  ne dépend que de  $\delta, \lambda, \varepsilon$ .

L'approche que nous emploierons sera inverse. Donné un élément  $h$  sans torsion, nous le transformerons en un élément  $h'$  sans torsion tel que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (h')^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}']$  soit une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésique pour  $\lambda, \varepsilon$  connus, et tel que  $h$  vérifie une propriété  $P$  recherchée, si et seulement si  $h'$  vérifie une propriété  $P'$  analogue. Nous introduirons pour cela la notion de mot  $C$ -réduit.

**Définition** Considérons un groupe  $G$ ,  $\delta$ -hyperbolique pour une famille génératrice finie,  $S$  donnée. Soit  $C > 0$  une constante. Un mot sur  $S$ ,  $\omega$  sera dit **C-réduit**, si  $\text{lgr}(\omega) > C$ , et si  $\omega$  et tous ses conjugués cycliques sont des mots géodésiques.

**Proposition 4.2.3** Soit  $G$  un groupe muni de la famille génératrice finie  $S$ , de façon à ce que  $(G, d_S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique. Il existe des constantes calculables,  $C > 0$ ,  $\lambda \geq 1$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , telles que si  $\omega$  est un mot  $C$ -réduit sur  $S$ , alors le chemin infini  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \omega^n \cdot [\bar{1}, \bar{\omega}]$  de  $\Gamma(G, S)$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique (en particulier,  $\omega$  représente un élément sans torsion de  $G$ ).

**Démonstration** Si  $\omega$  est  $C$ -réduit, alors le chemin infini  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \omega^n \cdot [\bar{1}, \bar{\omega}]$  est une  $(1, 0, C)$ -quasi-géodésique locale (cf. [CDP]). Avec le théorème III.1.4 de [CDP] (quasi-géodésité locale implique quasi-géodésité globale), il existe  $C > 0$ ,  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$ , tels que toute  $(1, 0, C)$ -quasi-géodésique locale soit une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique. ■

Considérons un groupe  $G$ ,  $\delta$ -hyperbolique, muni de la famille génératrice finie  $S$ . Fixons durant la fin de cette section, la constante  $C$  provenant de la proposition précédente. Nous décrivons maintenant la procédure permettant donné un mot sur  $S$  représentant un élément  $h$  sans torsion de  $G$ , de lui associer un mot  $C$ -réduit représentant un conjugué d'une puissance de  $h$ .

**Procédure de C-réduction :** Considérons un mot  $\omega$  sur  $S$ , représentant un élément sans torsion  $h \in G$ . La procédure de  $C$ -réduction permet de déterminer un mot  $a$  sur  $S$ , un entier non nul  $n$ , et un mot  $C$ -réduit  $h_1$ , tels que  $h_1 = ah^n a^{-1}$  dans  $G$ .

**Etape 1 :** Avec l'algorithme du mot, on peut supposer que  $\omega$  est un mot géodésique. Supposons maintenant qu'un conjugué cyclique de  $\omega$  ne soit pas géodésique. Par exemple  $\omega \equiv \omega_i \omega_t$  et il existe un mot géodésique  $\omega_1$ , tel que

$$\omega_t \omega_i = \omega_1 \quad \text{dans } G$$

et

$$lgr(\omega_1) < lgr(\omega_t \omega_i) = lgr(\omega_t) + lgr(\omega_i) = lgr(\omega)$$

On peut utiliser l'algorithme du mot pour décider si le mot  $\omega_t \omega_i$  est ou non géodésique, et le cas échéant déterminer  $\omega_1$ . On considère dès lors le mot  $\omega_1$ , il représente dans  $G$  le conjugué de  $\omega$  par  $\omega_i^{-1}$ . On applique alors cette procédure à  $\omega_1$ , pour obtenir  $\omega_2$ , et ainsi de suite. Puisque la longueur des mots diminue strictement, cette procédure s'arrête, et on obtient un mot  $\omega_0$  non vide, et un mot  $\alpha$ , tels que tous les conjugués cycliques de  $\omega_0$  soient géodésiques, et tels que  $\alpha$  conjugue  $\omega$  en  $\omega_0$  dans  $G$ . Si  $\omega_0$  est de longueur au moins  $C$ , la procédure s'arrête et on pose  $h_1 \equiv \omega_0$ , sinon on applique l'étape 2 à  $w_0$ .

**Etape 2 :** Si  $\omega$  est un mot de longueur inférieure à  $C$ , alors on considère un entier  $n$ , tel que le mot  $\omega^n$  soit de longueur au moins  $C$ . On applique alors l'étape 1 à  $\omega_n$ .

Montrons que si  $h$  est d'ordre infini la procédure s'arrête. Si ce n'est pas le cas, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs  $(u_n)$ , telle que pour tout entier  $n > 0$ , il existe un conjugué de  $h^{u_n}$  qui s'écrit comme un mot de longueur inférieure à  $C$ . Puisque dans  $(G, d_S)$ , la boule centrée en 1, de rayon  $C$  contient un nombre fini d'éléments, il existe une suite extraite  $(u_{\varphi(n)})_n$  (strictement croissante), telle que pour tout  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_*$ ,  $h^{u_{\varphi(n_1)}} \sim h^{u_{\varphi(n_2)}}$ . Avec la proposition 4.2.2, ceci n'est possible que si  $h$  est de torsion. On en déduit immédiatement le résultat suivant.

**Proposition 4.2.4 (Déterminer la torsion)** *Soit  $G$  un groupe muni d'une famille génératrice finie  $S$ , telle que  $(G, d_S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique. Il existe une procédure qui, donné un mot sur les générateurs décide s'il représente un élément de torsion dans  $G$ .*

**Démonstration** D'une part on énumère les entiers  $n \in \mathbb{N}$ , et pour chacun on utilise l'algorithme du mot pour décider si  $h^n = 1$  dans  $G$ . D'autre part on applique la procédure de  $C$ -réduction à  $h$ . Au bout d'un temps fini, l'un des procédés s'arrêtera

et nous fournira une réponse. ■

Dans le cas où nous traiterons avec deux constantes  $h, h'$ , nous aurons besoin de raffiner la procédure de  $C$ -réduction.

**Procédure de  $C$ -réductions jumelées :** Si l'on considère deux mots  $h, h'$  représentant des éléments sans torsion de  $S$ , et qu'on leur applique la procédure de  $C$ -réduction, on obtient deux mots  $h_1, h'_1$  et deux entiers  $n, m$ , tels que dans  $G$ ,  $h_1$  soit conjugué à  $h^n$ , et  $h'_1$  soit conjugué à  $h'^m$ . Dans le cas de deux éléments, cette dernière approche s'avère être souvent insuffisante pour déduire d'une relation algébrique portant sur  $h$  et  $h'$ , une relation portant sur  $h_1, h'_1$ . Aussi, nous modifions la procédure de façon à obtenir  $h_1, h'_1$  et  $N \in \mathbb{N}_*$ , tels que  $h_1, h'_1$  soient les conjugués respectifs de  $h^N, h'^N$ . Pour cela nous réduisons  $h$  et  $h'$  simultanément, de la façon suivante :

**Étape 1 :** On applique l'étape 1 de la procédure de  $C$ -réduction à  $h$  et  $h'$ . Si l'on obtient  $h_1, h'_1$  tous deux de longueur au moins  $C$ , alors la procédure s'arrête. Sinon on passe à l'étape 2.

**Étape 2 :** On y détermine  $N \in \mathbb{N}_*$ , tel que  $lgr(h^N)$  et  $lgr(h'^N)$  soit au moins  $C$ . On reprend alors la procédure à l'étape 1.

Si  $h$  et  $h'$  sont sans torsion, le même argument que dans le cas de la  $C$ -réduction, permet de montrer que cette procédure s'arrête.

Maintenant que nous avons défini, les notions d'élément  $C$ -réduit, et de procédure de  $C$ -réduction, nous allons donner des solutions aux problèmes algorithmiques qui nous intéressent, dans un groupe hyperbolique. Nous utiliserons de façon systématique, les solutions aux problèmes du mot et de la conjugaison, combiné à l'argument évoqué au début de cette section (il utilise les propriétés de stabilité des quasi-géodésiques dans un espace hyperbolique). Rappelons que notre objectif, est de résoudre les algorithmes de détermination des 2-cosets, et des classes périphérales dans  $\Gamma$ , groupe d'une variété hyperbolique de volume fini. Pour cela nous aurons besoin de déterminer un (nombre fini de) groupe  $\Gamma_1$ , quotient de  $\Gamma$ , qui soit  $\delta$ -hyperbolique, et soit «acceptable», dans un sens que nous expliquerons plus tard. Les algorithmes de cette section, sont scindés en deux classes. la première, constituée de la proposition 4.2.4, et des corollaires 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5, sert à déterminer si  $\Gamma_1$  est «acceptable». La deuxième classe, constituée des corollaires 4.2.1, 4.2.3, sert à donner une solution aux algorithmes dans  $\Gamma_1$ , obtenus comme l'«image» des algorithmes considérés dans  $\Gamma$ . Nous verrons à la fin de ce chapitre, comment une solution dans (deux tels)  $\Gamma_1$  peut nous permettre de déterminer une solution dans  $\Gamma$ .

Rappelons, que durant toute cette section, nous considérons un groupe  $G$  muni d'une famille génératrice finie  $S$ , avec  $(G, d_S)$   $\delta$ -hyperbolique, et nous fixons les constantes  $C, \lambda, \varepsilon$ , provenant de la proposition 4.2.3.

**Proposition 4.2.5** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique, muni de la famille génératrice finie,  $S$ . Soient  $\delta \geq 1$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , et  $C$  comme dans la proposition 4.2.3. Soient  $h$  et*

$\omega$  deux mots sur  $S$ ,  $C$ -réduits. Si  $\omega$  est conjugué dans  $G$  à  $h^n$ , alors il existe une constante calculable  $L = L(\delta, \varepsilon, \lambda, |\omega|, |h|)$ , tel que  $n \leq L$ .

**Démonstration** On se place dans le graphe de Cayley. On note  $[\bar{1}, \bar{h}]$  le chemin géodésique de label  $h$ , et  $\mathcal{H}$  le chemin bi-infini :

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}]$$

Puisque  $h$  est  $C$ -réduit, avec la proposition 4.2.3,  $\mathcal{H}$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésique de  $\Gamma(G, S)$ . Avec le théorème III.3.1 de [CDP], (théorème de stabilité des quasigéodésiques de longueur infinie),  $\mathcal{H}$  a exactement deux points d'accumulation,  $h_-$  et  $h_+$  dans  $\partial\Gamma(G, S)$ , et il existe une constante calculable  $k$ , ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon$ , telle que  $H$  est dans un  $k$ -voisinage de toute géodésique joignant  $h_-$  à  $h_+$ , et inversement, toute géodésique joignant  $h_-$  à  $h_+$  est dans le  $k$ -voisinage de  $H$ .

Notons  $[\bar{1}, \bar{\omega}]$ , le chemin géodésique de label  $\omega$ . Supposons que  $h^n = u\omega u^{-1}$  dans  $G$ . Puisque  $\omega$  est  $C$ -réduit, et que  $G$  agit par isométrie sur  $\Gamma(G, S)$ , le chemin bi-infini,

$$\mathcal{W} = u \cdot \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \omega^n \cdot [\bar{1}, \bar{\omega}] \right)$$

est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique, et a donc deux points d'accumulation dans  $\partial\Gamma(G, S)$ . Maintenant, puisque  $h^n = u\omega u^{-1}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$  restent à distance de Hausdorff bornée. Avec le corollaire II.1.3 de [CDP],  $\mathcal{W}$  a donc  $h_-$  et  $h_+$  comme points d'accumulation.

Considérons maintenant,  $[h_-, h_+]$ , une géodésique reliant  $h_-$  et  $h_+$ . Avec ce qui précède,  $\mathcal{H}$  est dans le  $k$ -voisinage de  $[h_-, h_+]$  qui est elle-même dans le  $k$ -voisinage de  $\mathcal{W}$ . Ainsi il existe un chemin reliant  $\bar{1}$  à un point de  $\mathcal{W}$ , de longueur inférieure

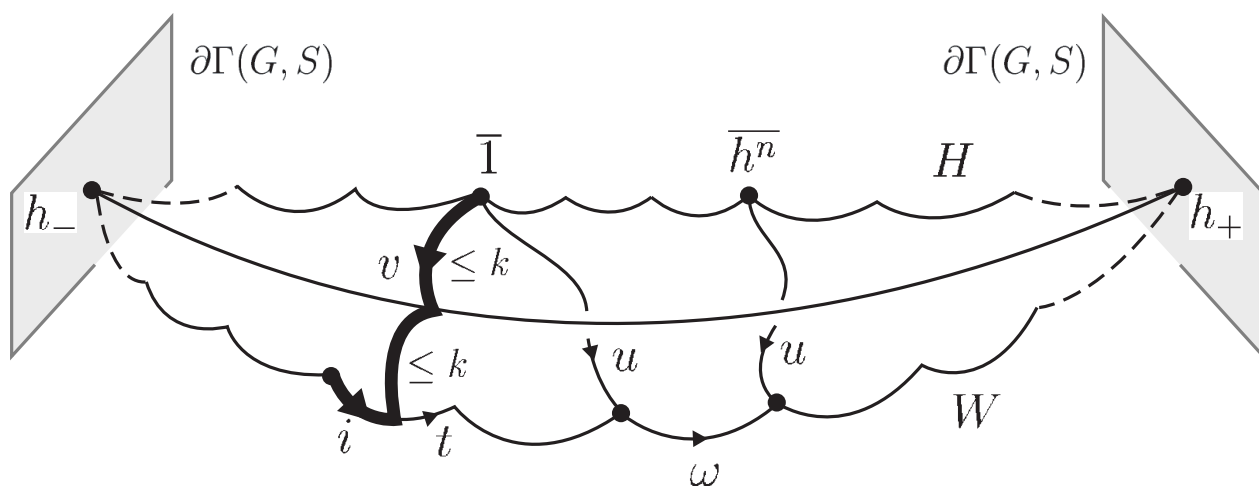


FIG. 4.4 –

à  $2k$  (cf. figure 5.4). Notons  $v$  le label de ce chemin. Alors, il existe  $p \in \mathbb{Z}$ , tel que dans  $G$ ,

$$v = u\omega^p\omega_i$$

où  $\omega_i$  est un sous-mot initial de  $\omega$ , i.e.  $\omega \equiv \omega_i \omega_t$ . Ainsi,  $u = v\omega_i^{-1}\omega^{-p}$ , et puisque  $h^n = u\omega u^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} h^n &= v\omega_i^{-1}\omega^p\omega\omega^{-p}\omega_i v^{-1} \\ &= (v\omega_i^{-1})\omega(v\omega_i^{-1})^{-1} \\ &= v'\omega v'^{-1} \end{aligned}$$

On obtient donc un élément  $v' = v\omega_i^{-1}$  de longueur majorée par  $2k + |w|$ , qui conjugue  $\omega$  en  $h^n$ . Maintenant, puisque  $\mathcal{H}$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique,

$$\begin{aligned} \text{lgr}(h^n) &\leq \lambda|h^n| + \varepsilon \\ n\text{lgr}(h) &\leq \lambda(4k + 3|\omega|) + \varepsilon \\ n &\leq \frac{1}{\text{lgr}(h)}(\lambda(4k + 3|\omega|) + \varepsilon) \end{aligned}$$

et ainsi,  $n$  est majoré par une constante  $L$ , ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon, |\omega|, |h|$ . ■

**Corollaire 4.2.1 (Détermination des classes périphérales)** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique sur une famille génératrice  $S$ , et  $h \in G$  un élément d'ordre infini. Donné un élément  $\omega \in G$ , on peut décider si  $\omega$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $\langle h \rangle$ . De plus, si c'est le cas,  $\omega$  est conjugué à au plus deux éléments de  $\langle h \rangle$ .*

**Démonstration** On suppose  $h$  et  $\omega$  donnés par des mots sur  $S$ . On fixe  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$ , et  $C$  donnés par la proposition 4.2.3. Si les mots  $h$  et  $\omega$  sont  $C$ -réduits, alors la proposition 4.2.5 nous donne une borne calculable  $L$ , ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon, |\omega|, |h|$ , telle que si  $\omega$  est conjugué à  $h^n$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $|n| \leq L$ . On utilise ensuite l'algorithme de la conjugaison pour décider si  $\omega$  est conjugué à  $h^p$ , pour tout entier  $p$  vérifiant  $-L \leq p \leq L$ . On détermine ainsi tous les éléments  $p \in \mathbb{Z}$ , tels que  $\omega$  soit conjugué à  $h^p$  (avec la proposition 4.2.2, il y en a au plus deux).

Si  $h$  ou  $\omega$  ne sont pas  $C$ -réduits, alors on leur applique la procédure de  $C$ -réduction jumelée, d'une part, et d'autre part, on utilise l'algorithme du mot pour tester si une puissance de  $\omega$  représente l'identité de  $G$ . Si  $\omega$  est de torsion, cet algorithme finit par le déterminer, et  $\omega$  ne peut définitivement pas être conjugué à une puissance non triviale de  $h$ . Sinon, on finit par obtenir les mots  $h_1, \omega_1$   $C$ -réduits, conjugués respectifs de  $h^N$  et  $\omega^N$  pour un certain  $N$ .

Si  $\omega$  est conjugué à  $h^n$ , alors  $\omega_1$  est conjugué à  $h_1^n$ . En utilisant la proposition 4.2.5, on détermine au plus deux éléments  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\omega_1$  soit conjugué à  $h_1^n$ . Il suffit pour conclure d'utiliser l'algorithme de la conjugaison, pour décider si  $\omega$  est conjugué à  $h^n$  pour un tel  $n$ . ■

**Corollaire 4.2.2 (Problème du mot généralisé de  $\mathbb{Z}$  dans  $G$ )** *Soient  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique sur une famille génératrice  $S$ , et  $h \in G$  un élément d'ordre infini. Donné  $\omega \in G$  on peut décider si  $\omega \in \langle h \rangle$ .*

**Démonstration** Appliquer l'algorithme du mot, pour décider si  $\omega$  est égal à un des éléments de  $\langle h \rangle$  qui lui sont conjugués, fournis par le corollaire 4.2.1. ■

**Proposition 4.2.6** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique, muni d'une famille génératrice finie  $S$ . Soient  $\lambda \geq 1$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , et  $C$  la constante dont l'existence provient de la proposition 4.2.3. Soient  $h_1$  et  $h_2$  des mots sur  $S$ ,  $C$ -réduits, et  $u$  et  $v$  des éléments de  $G$ .*

*Supposons qu'il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $u = h_1^{n_1} v h_2^{n_2}$  dans  $G$ . Alors il existe une constante calculable  $K > 0$ , ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon, |u|, |v|, |h_1|, |h_2|$  et du cardinal de  $S$ , et deux entiers  $m_1, m_2$  avec  $|m_1| < K, |m_2| < K$ , tels que  $u = h_1^{m_1} v h_2^{m_2}$  dans  $G$ .*

**Démonstration** On se place dans le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ , et on suppose que  $u = h_1^{n_1} v h_2^{n_2}$ . Notons  $[\bar{1}, \overline{h_1}]$ , et  $[\bar{1}, \overline{h_2}]$  les chemins géodésiques de labels respectifs  $h_1, h_2$ . On note

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= [\bar{1}, \overline{h_1}] \cup h_1 \cdot [\bar{1}, \overline{h_1}] \cup \dots \cup h_1^{n_1-1} \cdot [\bar{1}, \overline{h_1}] \\ \mathcal{H}_2 &= [\bar{1}, \overline{h_2^{-1}}] \cup h_2^{-1} \cdot [\bar{1}, \overline{h_2^{-1}}] \cup \dots \cup h_2^{1-n_2} \cdot [\bar{1}, \overline{h_2^{-1}}]\end{aligned}$$

Puisque  $h_1$  et  $h_2$  sont des mots  $C$ -réduits, avec la proposition 4.2.3, ce sont des chemins  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasigéodésiques de longueur finie. Puisque  $G$  agit par isométrie sur  $\Gamma(G, S)$ , le chemin  $u \cdot \mathcal{H}_1$  est aussi une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique.

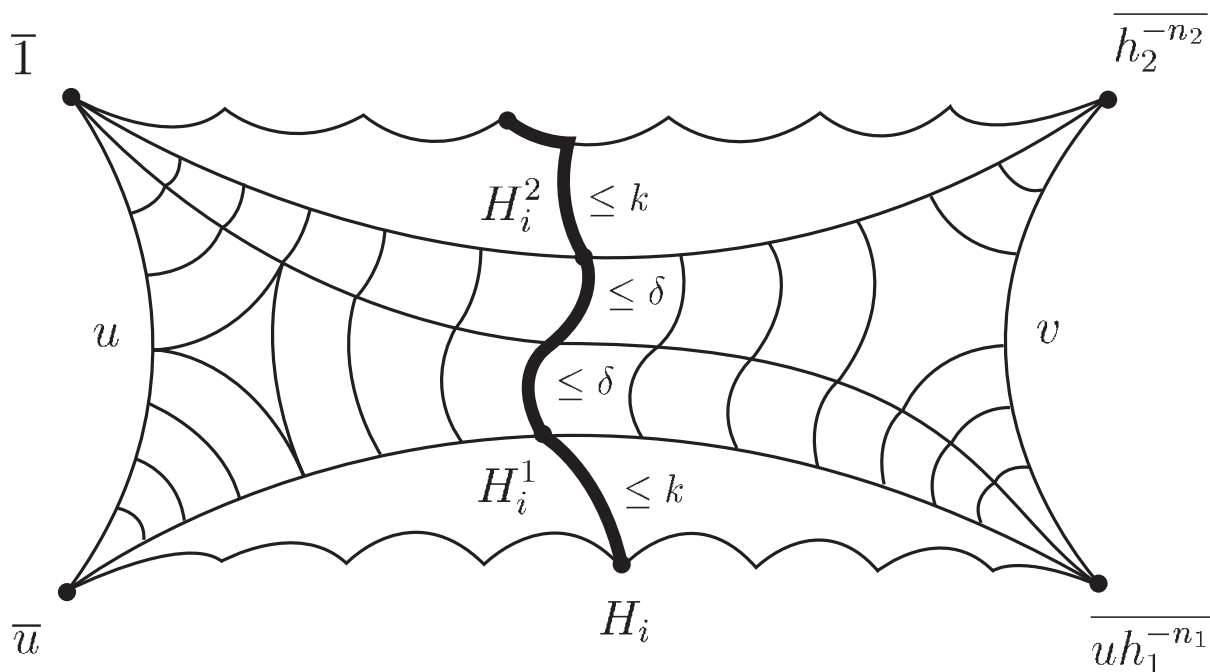


FIG. 4.5 –

Avec le théorème de stabilité des quasi-géodésiques de longueur finie (théorème III.1.3 de [CDP], il existe une constante calculable  $k$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon$ , telle que  $u \cdot \mathcal{H}_1$  est dans le  $k$ -voisinage de toute géodésique joignant  $\bar{u}$  à  $\overline{u h_1^{n_1}}$ .

Considérons un quadrilatère géodésique  $Q$ , de sommets  $\bar{1}, \bar{u}, \overline{u h_1^{n_1}}, \overline{h_2^{-n_2}}$ . Soit  $0 \leq n \leq n_1$ , et notons  $H_n$  le point  $\overline{u h_1^n}$ . Il existe un chemin de  $H_n$  à la géodésique  $[\bar{u}, \overline{u h_1^{n_1}}]$ . Appelons  $H_n^1$  son extrémité. En considérant une géodésique de  $\bar{1}$  à  $\overline{u h_1^{n_1}}$ , puis une foliation des deux triangles géodésiques obtenus à partir de  $Q$  et de cette



géodésique, on peut construire un chemin reliant  $H_n^1$  à  $[\overline{1}, \overline{h_2^{-n_2}}]$ , de longueur inférieure à  $k_1 = 3\delta + \max\{|u|, |v|\}$ . Appelons  $H_n^2$  son extrémité. Puisque  $\mathcal{H}_2$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique, avec le théorème de stabilité des quasi-géodésiques de longueur finie, il existe un chemin de  $H_n^2$  à  $\mathcal{H}_2$ , de longueur inférieure à  $k$ . Ainsi, on peut trouver  $0 \leq m \leq n_2$ , et un chemin de  $H_n^2$  à  $\overline{h_2^{-m}}$ , de longueur inférieure à  $k + |h_2|$ . Et finalement, pour tout  $n, 0 \leq n \leq n_1$ , On peut trouver un chemin de  $H_n$  à  $\overline{h_2^{-m}}$  de longueur majorée par  $K_1 = 2k + 3\delta + \max\{|u|, |v|\} + |h_2|$  (cf. figure 5.5.).

Il existe au plus  $\text{card}(S)^{K_1}$  éléments de  $G$  pouvant s'écrire en un mot de longueur au plus  $K$ . Supposons que  $n_1 > \text{card}(S)^{K_1}$ . Alors il existe  $c \in G$ ,  $0 < r < n_1$ , et  $s \in \mathbb{Z}$  tels que  $h_1^r = ch_2^s c^{-1}$  dans  $G$ . Ainsi  $u = h_1^{n_1-r} v h_2^{n_2+s}$ , avec  $n_1 - r < n_1$  (cf. figure 5.6). Ainsi on peut trouver  $m_1, m_2$ , avec  $m_1 \leq \text{card}(S)^{K_1}$ , tels que  $u = h_1^{m_1} v h_2^{m_2}$ .

Il ne reste plus qu'à majorer  $m_2$  (on ne peut pas utiliser un argument par symétrie, car lorsque  $n_1$  diminue,  $n_2$  peut augmenter, et réciproquement). Le chemin  $[\overline{1}, \overline{h_2^{-1}}] \cup \dots \cup h_2^{1-n_2} [\overline{1}, \overline{h_2^{-1}}]$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique, ainsi,

$$\begin{aligned} \text{lgr}(h_2^{m_2}) &\leq \lambda |h_2^{-m_2}| + \varepsilon \\ m_2 |h_2| &\leq \lambda(|u| + |v| + m_1 |h_1|) + \varepsilon \\ m_2 &\leq \frac{1}{|h_2|} (\lambda(|u| + |v| + m_1 |h_1|) + \varepsilon) \end{aligned}$$

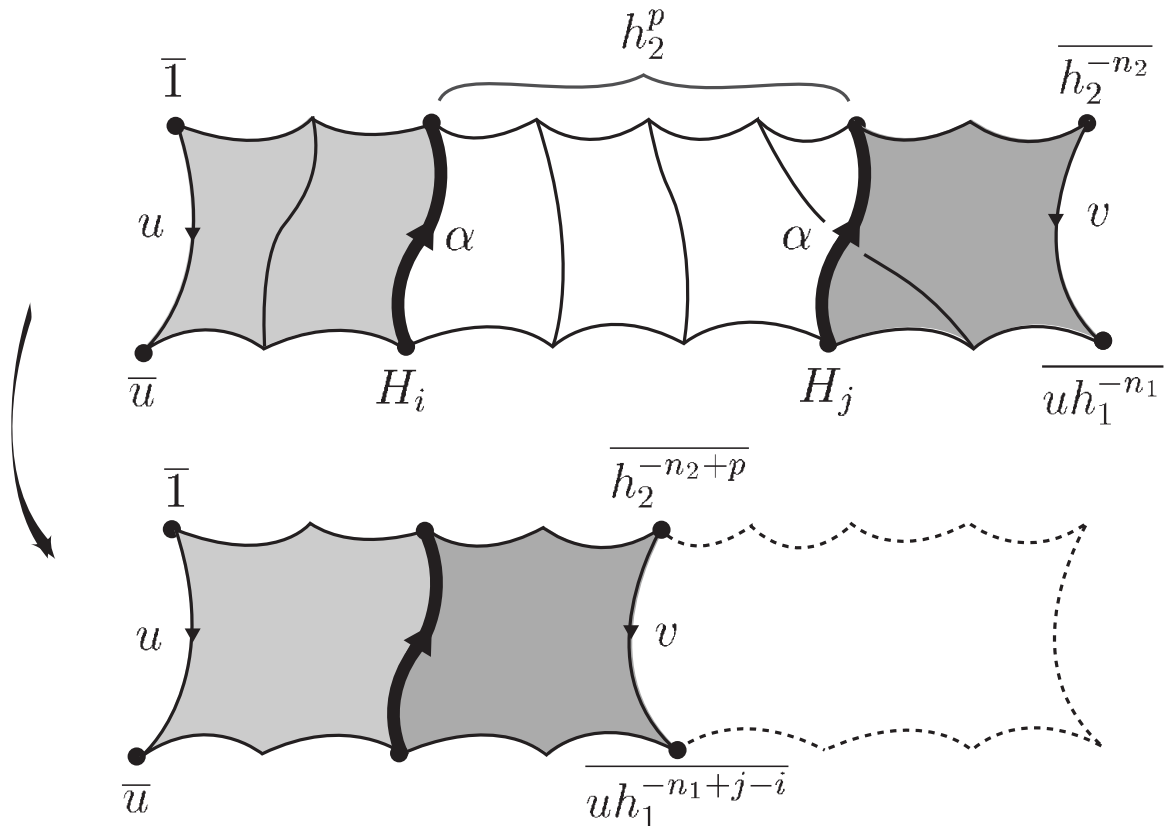


FIG. 4.6 –

Ainsi  $m_2$  est majoré par une constante  $K_2$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon, |u|, |v|, |h_1|$ , et  $|h_2|$ . Maintenant on pose  $K = \max\{\text{card}(S)^{K_1}, K_2\}$ . ■

**Corollaire 4.2.3 (Détermination des 2-cosets)** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique, sur la famille génératrice  $S$ . Soient  $h_1$  et  $h_2$  des éléments de  $G$  d'ordre infini. Donnés  $u, v \in G$ , on peut décider si il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $u = h_1^{n_1} v h_2^{n_2}$ , et le cas échéant donner un tel couple  $(n_1, n_2)$*

**Démonstration** On se donne  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$ , et  $C$  comme dans la proposition 4.2.3. On se donne  $h_1, h_2, u, v$  par des mots sur  $S$ . Si  $h_1$  et  $h_2$  sont  $C$ -réduits, la proposition 4.2.6 nous donne une constante calculable  $K$ , et on peut alors utiliser l'algorithme du mot pour déterminer, si il existe, deux entiers  $m_1, m_2$ , avec  $|m_1| < K$ ,  $|m_2| < K$ , tels que  $u = h_1^{m_1} v h_2^{m_2}$ .

Si  $h_1$  ou  $h_2$  n'est pas  $C$ -réduit, on applique le procédé de  $C$ -réduction jumelée à  $h_1$  et  $h_2$ . On obtient des mots  $H_1, H_2$ ,  $C$ -réduits, les mots  $a_1, a_2$ , et  $N \in \mathbb{N}$ , tels que  $H_1 = a_1 h_1^N a_1^{-1}$  et  $H_2 = a_2 h_2^N a_2^{-1}$  dans  $G$ . Alors,  $n_1 = q_1 N + r_1$  et  $n_2 = q_2 N + r_2$ , pour  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ , et  $r_1, r_2 \in \{0, \dots, N-1\}$ , et

$$\begin{aligned} u &= h_1^{n_1} v h_2^{n_2} \\ &= h_1^{q_1 N + r_1} v h_2^{q_2 N + r_2} \\ \Leftrightarrow u h_2^{-r_2} &= (h_1^N)^{q_1} h_1^{r_1} v (h_2^N)^{q_2} \\ \Leftrightarrow a_1 u h_2^{-r_2} a_2^{-1} &= a_1 (h_1^N)^{q_1} a_1^{-1} a_1 h_1^{r_1} v a_2^{-1} a_2 (h_2^N)^{q_2} a_2^{-1} \\ \Leftrightarrow a_1 u h_2^{-r_2} a_2^{-1} &= H_1^{q_1} (a_1 h_1^{r_1} v a_2^{-1}) H_2^{q_2} \end{aligned}$$

Pour  $0 \leq i < N$ , on pose

$$\begin{aligned} U_i &= a_1 u h_2^{-i} a_2^{-1} \\ V_i &= a_1 h_1^i v a_2^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_*$ , tels que  $u = h_1^{n_1} v h_2^{n_2}$ , si et seulement si il existe  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ , et  $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$  tels que  $U_i = h_1^{q_1} V_j h_2^{q_2}$ , ce dont on peut décider puisque  $\{0, \dots, N-1\}$  est fini, et que  $H_1, H_2$  sont  $C$ -réduits. ■

**Proposition 4.2.7** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique muni d'une famille génératrice  $S$ . Soient  $\delta, \varepsilon$  et  $C$  comme dans la proposition 4.2.3, et soient  $h_1, h_2$  des mots sur  $S$ ,  $C$ -réduits. Si un élément non trivial de  $\langle h_1 \rangle$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $\langle h_2 \rangle$ , alors il existe une constante  $L = L(\delta, \varepsilon, \lambda, |h_1|, |h_2|)$ , et  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_*$  tels que  $|n_1| \leq L$ ,  $|n_2| \leq L$ , et  $h_1^{n_1}$  est conjugué à  $h_2^{n_2}$ .*

**Démonstration** Supposons qu'il existe  $u \in G$ , qui conjugue  $h_1^{p_1}$  en  $h_2^{p_2}$ . Notons  $[\bar{1}, \bar{h}_1]$  et  $[\bar{1}, \bar{h}_2]$  les chemins géodésiques de labels respectifs  $h_1, h_2$ . Avec la proposition 4.2.3, puisque  $h_1, h_2$  sont  $C$ -réduits, les chemins bi-infinis de  $\Gamma(G, S)$ ,  $\mathcal{H}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h_1^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}_1]$ , et  $\mathcal{H}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h_2^n \cdot [\bar{1}, \bar{h}_2]$  sont des  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésiques. Puisque  $u$  conjugue  $h_1^{p_1}$  en  $h_2^{p_2}$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont à distance de Hausdorff bornée, et donc avec le théorème III.3.1, et le corollaire II.1.3 de [CDP], elles ont même points d'accumulation dans le bord du graphe de Cayley,  $h_-$  et  $h_+$ . Avec le théorème III.3.1 de [CDP] elles sont dans un  $2k$ -voisinage l'une de l'autre, où  $k$  ne dépend que de  $\delta, \lambda, \varepsilon$ . De la même façon que dans la démonstration de la proposition 4.2.5, on peut alors trouver un élément  $v \in G$  de longueur inférieure à  $2k + |h_1| + |h_2|$ , qui conjugue  $h_1^{p_1}$  en  $h_2^{p_2}$ . En

appliquant la proposition 4.2.6 il existe donc une constante  $L = L(\delta, \varepsilon, \lambda, |h_1|, |h_2|)$ , et  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $|n_1| \leq L$ ,  $|n_2| \leq L$ , et  $h_1^{n_1}$  est conjugué à  $h_2^{n_2}$ . ■

**Corollaire 4.2.4 (Conjugaisons périphérales I)** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique, et  $h$  un élément d'ordre infini de  $G$ . Il existe un algorithme permettant de décider s'il existe un élément de  $G - \langle h \rangle$  qui conjugue deux éléments non triviaux de  $\langle h \rangle$ .*

**Démonstration** Commençons par remarquer, bien que cela ne soit pas nécessaire, qu'avec la proposition 4.2.2, si  $a$  conjugue  $h^p$  en  $h^q$ , alors nécessairement  $p = \pm q$  et  $a^r = h^s$ .

Supposons tout d'abord que  $h$  soit  $C$ -réduit. Avec la proposition 4.2.7, on peut prendre  $0 < p \leq L$  où  $L$  est un entier calculable ne dépendant que de  $\delta, \lambda, \varepsilon, |h|$ . Reprenons la démonstration de la proposition 4.2.5. Si  $u$  conjugue  $h^p$  en  $h^q$ , alors il existe  $v'$  qui conjugue  $h^p$  en  $h^q$  vérifiant en outre  $|v'| \leq 2k + |h|$  (où  $k$  ne dépend que de  $\delta, \lambda, \varepsilon$ ). De plus,  $u = v'h^t$ , et ainsi,  $u \in \langle h \rangle \iff v' \in \langle h \rangle$ . Ainsi il suffit d'utiliser l'algorithme du mot pour décider si  $h^p = uh^qu^{-1}$ , pour  $0 < p \leq L$ ,  $p = \pm q$ , et  $|u| \leq 2k + |h|$ , et le corollaire 4.2.2 pour décider si  $u \in \langle h \rangle$ , pour conclure.

Si  $h$  n'est pas  $C$ -réduit, on le réduit en un élément  $h' = ah^na^{-1}$   $C$ -réduit. Il est aisé de vérifier que s'il existe un élément hors de  $\langle h \rangle$ , qui conjugue deux éléments non triviaux de  $\langle h \rangle$ , alors il existe un élément hors de  $\langle aha^{-1} \rangle \supset \langle h' \rangle$  (de longueur bornée), qui conjugue deux éléments non triviaux de  $\langle h' \rangle$ . Réciproquement, s'il existe un élément  $\omega$  hors de  $\langle h' \rangle$  qui conjugue deux éléments non triviaux de  $\langle h' \rangle$ , alors soit  $\omega \in \langle aha^{-1} \rangle$ , soit il existe un élément hors de  $\langle h \rangle$  conjuguant deux éléments non triviaux de  $\langle h \rangle$ . Ainsi il suffit pour en décider de combiner l'algorithme du corollaire 4.2.2, à une résolution pour  $h'$ . ■

**Corollaire 4.2.5 (Conjugaisons périphérales II)** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique, et  $h_1, h_2 \in G$  des éléments d'ordre infini. On peut décider si il existe un élément non trivial de  $\langle h_1 \rangle$  conjugué à un élément de  $\langle h_2 \rangle$ .*

**Démonstration** On se donne  $\lambda \geq 1, \varepsilon \geq 0$ , et  $C$  comme dans la proposition 4.2.3.

Si  $h_1$  et  $h_2$  sont des mots  $C$ -réduits, la proposition 4.2.7 donne une constante calculable  $L$ , telle que si un élément non trivial de  $\langle h_1 \rangle$  est conjugué à un élément de  $h_2$ , il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_*$ , tels que  $|n_1| < L, |n_2| < L$ , et  $h_1^{n_1}$  est conjugué à  $h_2^{n_2}$ . On peut alors utiliser l'algorithme de la conjugaison pour décider si c'est ou non le cas.

Si  $h_1$  ou  $h_2$  n'est pas  $C$ -réduit. On applique le procédé de  $C$ -réduction jumelée, pour obtenir les mots  $C$ -réduits  $H_1, H_2$ , conjugués respectifs de  $h_1^N$  et  $h_2^N$  pour un certain  $N$ . Clairement, un élément non trivial de  $\langle h_1 \rangle$  est conjugué à un élément de  $\langle h_2 \rangle$  si et seulement si un élément non trivial de  $\langle H_1 \rangle$  est conjugué à un élément de  $\langle H_2 \rangle$ . On peut donc conclure. ■

## 4.3 Algorithmes dans le cas hyperbolique de volume fini

### 4.3.1 Comportement algébrique asymptotique

Si  $M$  est une variété hyperbolique de volume fini,  $\partial M$  est incompressible ([Sc]), et les composantes de  $\partial M$  sont des tores  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$ . On appelle **composante périphérale** l'image  $T_i$  d'un plongement de  $\pi_1(\mathcal{T}_i)$  dans  $\pi_1(M)$ . Il est bien connu que  $T_i$  est un sous-groupe parabolique maximal, isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  (cf. Chap. 12, [Ra]). Le résultat suivant, est une version algébrique (forte), du fait topologique célèbre, qu'une variété hyperbolique de volume fini, n'admet pas d'anneaux essentiels (cf. [Th1]).

**Proposition 4.3.1 (Anneaux essentiels)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, à bord non vide. Si  $T$  est une composante périphérale,  $T$  est caractérisé par un point fixe  $P \in \partial\mathbb{H}^3$ , i.e. tout élément de  $\pi_1(M)$  fixant  $P$  est dans  $T$ . De plus*

- a) Soit  $T$  une composante périphérale, si  $u \in \pi_1(M)$  conjugue deux éléments de  $T$ , alors  $u \in T$ .*
- b) Si  $T_1, T_2$  sont deux composantes périphérales distinctes, aucun élément non trivial de  $T_1$  n'est conjugué à un élément de  $T_2$ .*

**Démonstration** Sous ces hypothèses,  $\pi_1(M)$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{C})$  agissant par isométrie sur  $\mathbb{H}^3$ , et dont le quotient est isométrique à  $\text{Int}(M)$ . Cette action s'étend naturellement en une action de  $\pi_1(M)$  sur  $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ .

La composante périphérale  $T$  consiste en un sous-groupe parabolique maximal, de point limite  $P$ , i.e.  $T$  est constitué d'éléments paraboliques fixant  $P$ , et réciproquement tout élément parabolique de  $\pi_1(M)$  fixant  $P$  est dans  $T$ . Le point  $P$  est appelé point cusp (cf. [Ra], §12.2). Supposons qu'un élément  $u$  non trivial quelconque de  $\pi_1(M)$  fixe le point  $P$ . Alors, puisque  $\pi_1(M)$  est un sous-groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , avec le théorème 5.5.4 de [Ra],  $u$  ne peut pas être loxodromique, et donc  $u$  est parabolique, et  $u \in T$ , ce qui démontre la première assertion.

Si  $u$  conjugue deux éléments de  $T$ , alors  $u$  fixe  $P$ , et donc  $u$  est dans  $T$ . Ceci démontre la partie a). Reste à démontrer b).

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux composantes périphérales distinctes, caractérisées par deux points cusps distincts,  $P_1, P_2 \in \partial\mathbb{H}^3$ . Si un élément  $u$  conjugue deux éléments non triviaux de  $T_1, T_2$ , alors  $u(P_1) = P_2$ . Ainsi, la conclusion b) est un corollaire immédiat, du fait bien connu, que pour une variété  $M$  hyperbolique de volume fini, les composantes connexes de  $\partial M$ , sont en correspondance bi-univoque, avec les orbites sous l'action de  $\pi_1(M)$ , de l'ensemble des points cusps (cf. [Ra], chap. 12). ■

Considérons  $(M_n)_n$  une suite non triviale de variétés hyperboliques, obtenues par obturation de Dehn sur la variété hyperbolique de volume fini  $M$ , convergeant vers  $M$  au sens de la topologie géométrique. Nous établissons maintenant deux résultats essentiels concernant le comportement algébrique asymptotique du groupe  $\pi_1(M_n)$ ,

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ces résultats établissent l'existence de «bons» quotients  $\pi_1(M_n)$  de  $\pi_1(M)$ , dans le sens où nous pourrions établir des algorithmes dans  $\pi_1(M)$ , en travaillant dans de tels quotients.

**Proposition 4.3.2 (Comportement algébrique asymptotique I)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, à bord non vide. Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés hyperboliques fermées obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , convergeant vers  $M$ . On note  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M_n)$  les surjections canoniques.*

*Alors pour  $n \gg 0$ , et pour toute composante périphérale  $T$  de  $\pi_1(M)$ ,*

- a)  $\rho_n(T)$  est un sous-groupe loxodromique cyclique infini maximal de  $\pi_1(M_n)$ .*
- b) Si  $v \in \pi_1(M_n)$  conjugue deux éléments  $t, t'$  de  $\rho_n(T)$ , alors  $t = t'$  et  $v \in \rho_n(T)$ .*
- c) Si  $T_1, T_2$  sont deux composantes périphérales distinctes de  $\pi_1(M)$ , aucun élément non trivial de  $\rho_n(T_1)$  n'est conjugué à un élément de  $\rho_n(T_2)$ .*

**Démonstration** On prend  $\varepsilon > 0$ , avec  $\varepsilon < \mu$  où  $\mu$  est la constante de Margulis (cf [Ra]), et la partie  $\varepsilon$ -fine de  $M$  ne consiste qu'en des  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps. Notons  $p$  le nombre de composantes (toriques) de  $\partial M$ . Avec la proposition 4.1.1, pour  $n \gg 0$  les parties  $\varepsilon$ -épaisses de  $M$  et  $M_n$  sont homéomorphes. On peut donc considérer un plongement de  $M$  dans  $M_n$ , tel que le complémentaire de  $M$  dans  $M_n$  consiste en la partie  $\varepsilon$ -fine de  $M_n$ , constituée de  $p$  tubes de Margulis. De tels tubes sont homéomorphes à  $S^1 \times D^2$ . Si  $\mathcal{T}$  est une composante de  $\partial M$  associée à une composante périphérale  $T$ , et si  $l$  est la pente de chirurgie sur  $\mathcal{T}$  permettant d'obtenir  $M_n$ , alors pour toute pente  $m$  de  $\mathcal{T}$  vérifiant  $m \wedge l = 1$ ,  $m$  est homotope dans  $M_n$  à l'âme du tube de bord  $\mathcal{T}$ . Ainsi, à conjugaison près,  $\rho_n(T)$  est engendré par la classe de l'âme de ce tube.

On note  $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow M_n$  l'application de revêtement. Un tube de Margulis est l'image par  $\pi$  d'un voisinage tubulaire d'une géodésique infinie  $A$ , appelée axe. L'image de l'axe,  $\pi(A)$ , est une géodésique fermée de  $M_n$ , homotope à l'âme du tube. Avec le théorème 9.6.2 de [Ra], il existe un élément  $h \in \pi_1(M_n)$  agissant de façon  $\pi$ -équivariante sur  $\mathbb{H}^3$  comme un élément loxodromique, d'axe  $A$ , tel que l'âme du tube représente à conjugaison près, cet élément  $h$ . Puisque  $h$  est loxodromique,  $h$  engendre un sous-groupe cyclique infini de  $\pi_1(M_n)$ . Supposons que  $h = x^n$  pour un certain  $x \in \pi_1(M_n)$ . Alors  $x$  agit sur  $\mathbb{H}^3$  comme un élément loxodromique d'axe  $A$ , et alors  $x$  est représenté par une puissance de l'âme du tube, et ainsi  $n = \pm 1$ . Puisque  $\rho_n(T)$  est conjugué à  $\langle h \rangle$ , on obtient a).

Avec ce qui précède,  $\rho_n(T)$  est un sous-groupe loxodromique cyclique maximal. Un sous-groupe loxodromique cyclique maximal  $H$ , est caractérisé par les points limites  $h^-, h^+$ , i.e.,  $u \in H$ , ssi  $u$  est un élément ayant pour points fixes  $h^-$  et  $h^+$ . Ainsi, les éléments de  $\rho_n(T)$  sont caractérisés par leurs deux points limites,  $t^-, t^+$ . Si un élément  $v$  conjugue deux éléments de  $\rho_n(T)$ , alors cet élément a pour points fixes  $t^-, t^+$ , et il appartient donc à  $\rho_n(T)$ . Ceci démontre la partie b).

Soient  $T_1, T_2$  deux composantes périphérales de  $M$ . Elles correspondent à deux composantes au bord distinctes de  $M$ , et donc, si  $n \gg 0$ , à deux tubes de Margulis distincts de  $M_n$ . Si un élément non trivial de  $\rho_n(T_1)$  est conjugué à un élément de  $\rho_n(T_2)$ , alors il existe un élément  $u \in \pi_1(M)$ , dont l'action sur  $\mathbb{H}^3$  envoie l'axe  $A_1$  de  $h_1$  sur l'axe  $A_2$  de  $h_2$ . Ceci contredit le fait que les tubes soient distincts, ce qui

démontre c). ■

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3.1** *Soit  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments loxodromiques de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , convergeant vers un élément parabolique  $\gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_n^-, \gamma_n^+$  les points fixes de  $\gamma_n$ , et  $\theta$  le point fixe de  $\gamma$ . Alors, dans  $\partial \mathbb{H}^3$  muni de sa topologie usuelle, les suites  $(\gamma_n^-)_n$  et  $(\gamma_n^+)_n$  convergent toutes deux vers  $\theta$ .*

**Démonstration** Commençons par rappeler la définition de la topologie usuelle de  $PSL(2, \mathbb{C})$  (cf. §5.1, [Ra]) :

– Le groupe général linéaire  $GL(2, \mathbb{C})$  des matrices  $2 \times 2$ , inversibles, à coefficients complexes admet pour norme :

$$|(a_{ij})_{i,j=1,2}| = \left( \sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de le munir naturellement d'une métrique  $d$ , par  $d(A, B) = |A - B|$ . Remarquons qu'il s'agit de la métrique euclidienne sur  $GL(2, \mathbb{C})$  vu comme sous-ensemble de l'espace hermitien  $\mathbb{C}^4$ . On munit alors  $GL(2, \mathbb{C})$  de la topologie métrique (ce qui en fait un groupe topologique).

– Le groupe spécial linéaire  $SL(2, \mathbb{C})$ , des matrices  $2 \times 2$ , à coefficients complexes, de déterminant 1. C'est un sous-groupe de  $GL(2, \mathbb{C})$ , que l'on munit de la topologie induite.

– Soit  $N$  le sous-groupe normal de  $SL(2, \mathbb{C})$  engendré par  $\text{Id}$  et  $-\text{Id}$ ,  $N = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$ . Alors, le groupe projectif unimodulaire  $PSL(2, \mathbb{C})$ , est défini par :

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / N$$

On munit  $PSL(2, \mathbb{C})$  de la topologie quotient. On peut vérifier que  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $PSL(2, \mathbb{C})$  munis de ces topologies, sont des groupes topologiques, et que la surjection canonique de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $PSL(2, \mathbb{C})$  est un revêtement d'indice 2.

On se donne l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  par le modèle du demi-plan supérieur, où les points sont vus comme des quaternions  $x + yi + zj$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}_+^*$ . Le bord de  $\mathbb{H}^3$  peut-être vu comme la sphère de Riemann,  $\mathbb{CP}^1 = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , et le groupe des isométries préservant l'orientation, peut-être identifié au groupe  $LF(\widehat{\mathbb{C}})$  des transformations de Moebius de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , c'est à dire, des homographies :

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{ et } ad - bc \neq 0$$

Clairement, si l'on multiplie  $a, b, c, d$  par un même nombre complexe, on ne modifie pas  $f$ . Aussi, on pourra supposer que  $ad - bc = 1$ . Ces transformations s'étendent naturellement en des difféomorphismes conformes de  $\overline{\mathbb{H}^3}$ , en associant à  $w \in \mathbb{H}^3$ ,

l'élément  $(aw+b)(cw+d)^{-1}$  de  $\mathbb{H}^3$ . Il existe un isomorphisme naturel  $\phi$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  sur  $LF(\widehat{\mathbb{C}})$ , donné par :

$$\phi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left( z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

(si  $LF(\widehat{\mathbb{C}})$  est muni de la topologie compact-ouverte,  $\phi$  s'avère être un isomorphisme de groupe topologique).

Considérons un élément  $f$  de  $LF(2, \mathbb{C})$ ,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , et  $ad - bc = 1$ . L'isométrie  $f$  est elliptique si  $a+d \in \mathbb{R}$  et  $(a+d)^2 < 4$ , parabolique si  $(a+d)^2 = 4$ , et loxodromique si  $a+d \notin \mathbb{R}$ , ou si  $(a+d)^2 > 4$  (cf. proposition A.5.18 de [BP]). Maintenant,  $f$  fixe le point  $z$  du bord, si et seulement si,  $z$  est solution de l'équation :

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Si  $c = 0$ , alors  $f$  fixe  $\infty$ , sinon on a un trinôme qui admet pour discriminant  $\Delta = (a+d)^2 - 4$ . Lorsque  $f$  n'est pas elliptique, considérons arbitrairement  $\delta \in \mathbb{C}$ , tel que  $\delta^2 = \Delta$ , alors  $f$  admet pour points fixes, les éléments  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ,

$$z_1, z_2 = \frac{a-d \pm \delta}{2c}$$

Venons-en à la démonstration proprement dite. Considérons une suite  $(\gamma_n)_n$  d'éléments loxodromiques de  $PSL(2, \mathbb{C})$  convergeant vers l'élément parabolique  $\gamma$ . Notons,

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Puisque la surjection canonique de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $PSL(2, \mathbb{C})$  est un revêtement, pour  $n \gg 0$ ,  $\gamma$  et  $\gamma_n$  se relèvent dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . Aussi, on supposera que  $\gamma$  et la suite  $(\gamma_n)_n$  sont dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , et par définition de la topologie quotient, la suite  $(\gamma_n)_n$  converge vers  $\gamma$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . En particulier, par définition de la topologie de  $SL(2, \mathbb{C})$ , on a convergence dans  $\mathbb{C}$ , des suites suivantes :

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b, \quad c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c, \quad d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d$$

Quitte à composer par une isométrie, on pourra supposer que les éléments  $\gamma$  et  $\gamma_n$ , n'ont pas  $\infty$  pour point fixe. L'élément  $\gamma$  a un point fixe  $\theta = (a-d)/2c$ , et l'élément  $\gamma_n$  a deux points fixes  $\gamma_n^-, \gamma_n^+$ ,

$$\gamma_n^- = \frac{a_n - d_n - \delta_n}{2c_n} \quad \gamma_n^+ = \frac{a_n - d_n + \delta_n}{2c_n}$$

Or la suite  $(\Delta_n)_n$  converge vers 0, et donc  $(\delta_n)_n$  converge aussi vers 0 (en posant  $\Delta_n = (a_n + d_n)^2 - 4$ , et  $\delta_n^2 = \Delta_n$ ). Ainsi les suites  $(\gamma_n^-)_n$  et  $(\gamma_n^+)_n$  convergent toutes deux vers  $\theta$ , dans  $\mathbb{C}$ , et donc dans  $\partial\mathbb{H}^3$ . ■

**Proposition 4.3.3 (Comportement algébrique asymptotique II)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, ouverte. Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés hyperboliques fermées obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , convergeant vers  $M$ . On note  $\rho_n : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M_n)$  les surjections canoniques.*

*Soit  $T$  une composante périphérale de  $M$ . Alors, si  $u \notin T$ , pour  $n \gg 0$ ,  $\rho_n(u) \notin \rho_n(T)$ .*

**Démonstration** Avec les notations du paragraphe 4.1.4, la suite de représentations  $P_n : \pi_1(M) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$  converge algébriquement vers  $P : \pi_1(M) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ . On veut montrer que si  $P(u) \notin P(T)$  alors pour  $n \gg 0$ ,  $P_n(u) \notin P_n(T)$ . Puisque  $P$  est une représentation fidèle,  $u \in T$  ssi  $P(u) \in P(T)$ . De plus, puisque par construction (cf. §4.1.4),  $P_n = p_n \circ \rho_n$ , si l'on a  $\rho_n(u) \in \rho_n(T)$ , alors  $P_n(u) \in P_n(T)$ . On aura alors démontré la proposition.

Nous montrons la contraposée. Supposons qu'il existe une suite extraite  $(P_{\sigma_n}(u))_n$ , de la suite  $(P_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , telle que pour tout  $n$ ,  $P_{\sigma_n}(u) \in P_{\sigma_n}(T)$ . Avec la proposition 4.3.2 a), pour  $n \gg 0$ ,  $P_n(T)$  est un sous-groupe loxodromique cyclique maximal de  $P_n(\pi_1(M)) \cong \pi_1(M_n)$ , ayant pour points limites  $t_n^-, t_n^+$ . Puisque, la suite de représentations  $(P_n)_n$  converge algébriquement vers  $P$  (proposition 4.1.8), avec le lemme 4.3.1, les suites de points  $(t_n^-)_n, (t_n^+)_n$  convergent vers un même point  $\theta \in \partial\mathbb{H}^3$ , point cusp du sous-groupe parabolique maximal  $P(T)$ . La suite de  $PSL(2, \mathbb{C})$   $(P_n(u))_n$  converge vers  $P(u)$ , et donc la suite extraite  $(P_{\sigma_n}(u))_n$  converge aussi vers  $P(u)$ . Or, puisque  $P_{\sigma_n}(u) \in P_{\sigma_n}(T)$ ,  $P_{\sigma_n}(u)$  a pour points fixes  $t_{\sigma_n}^-, t_{\sigma_n}^+$ , et donc avec le lemme 4.3.1,  $P(u)$  a pour point fixe  $\theta$ . Ainsi, puisque  $P(T)$  est un sous-groupe parabolique maximal,  $P(u) \in P(T)$ . ■

**Remarque :** La proposition affirme que si  $u \notin T$ , il existe une constante  $N(u) \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n > N(u)$ ,  $\rho_n(u) \notin \rho_n(T)$ . La constante  $N(u)$  n'est pas uniforme, elle dépend de  $u$  (en effet, pour tout  $n$ ,  $\ker(\rho_n) \not\subset T$ ). A défaut d'une constante uniforme, il nous aurait été utile de vérifier la propriété suivante, ce pour des questions de complexité de l'algorithme de détermination des 2-cosets I, dans le cas hyperbolique (prop. 4.3.9) :

– Si  $(M_n)_n$  est une suite convergeant vers  $M$ , il existe une constante  $N \in \mathbb{N}_*$ , telle que la famille finie  $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  vérifie que pour toute composante périphérale  $T \subset \pi_1(M)$ , et tout élément  $u \in \pi_1(M)$ , si  $u \notin T$ , alors il existe  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tel que  $\rho_i(u) \notin \rho_i(T)$  dans  $\pi_1(M_i)$ . C'est à dire, dans un sens heuristique, on peut se donner un ensemble fini de telles variétés, tel que si  $u \notin T$ , alors  $\rho_i(u) \notin \rho_i(T)$ , pour au moins une de ces variétés.

Malheureusement, cette proposition s'avère être toujours fausse. Fixons un entier  $N > 0$ , et une composante périphérale  $T \subset \pi_1(M)$ , provenant d'une composante  $\mathcal{T}$  de  $\partial M$ . Notons respectivement  $l_1, l_2, \dots, l_N$  les classes dans  $\pi_1(M)$ , des pentes de chirurgie sur  $\mathcal{T}$  de  $M_1, M_2, \dots, M_N$ . Alors  $\rho_i(l_i) = 1$  dans  $\pi_1(M_i)$ . Donnons nous un



élément  $x \in \pi_1(M)$ , vérifiant  $x \notin T$ . Puisque  $M$  est hyperbolique,  $x$  est d'ordre infini. Considérons dans  $\pi_1(M)$ , l'élément

$$[l_1, xl_2x^{-1}] = l_1.xl_2x^{-1}.l_1^{-1}.xl_2^{-1}x^{-1}$$

C'est un produit de conjugués de  $l_1^{\pm 1}$ , mais c'est aussi un produit de conjugués de  $l_2^{\pm 1}$ . Ainsi,  $\rho_1([l_1, xl_2x^{-1}]) = 1$  dans  $\pi_1(M_1)$ , et  $\rho_2([l_1, xl_2x^{-1}]) = 1$  dans  $\pi_1(M_2)$ . De plus, avec la proposition 4.3.1 a),

$$[l_1, xl_2x^{-1}] \in T \iff xl_2x^{-1}.l_1^{-1}.xl_2^{-1}x^{-1} \in T \iff xl_2x^{-1} \in T \iff x \in T$$

ainsi, puisque  $x \notin T$ ,  $[l_1, xl_2x^{-1}] \notin T$ . Sur le même modèle, notons pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $\lambda_i = x^{i-1}l_i x^{1-i}$ , et considérons l'élément de  $\pi_1(M)$ ,

$$h(N) = [[\dots [[\dots [[\lambda_1, \lambda_2], \lambda_3] \dots], \lambda_i] \dots], \lambda_N]$$

alors, avec les mêmes arguments, il est facile de vérifier, que pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $\rho_i(h(N)) = 1$  dans  $\pi_1(M_i)$ , et que  $h(N) \notin T$ . Ainsi, on pourra prendre  $N$  aussi grand que l'on veut, il existera toujours un élément de  $\pi_1(M) - T$ , qui est tué dans  $\pi_1(M_i)$  pour  $i \leq N$  (et donc qui vit dans  $\rho_i(T)$ !).

### 4.3.2 Vérifier l'hyperbolicité

Pour résoudre les algorithmes élémentaires dans le groupe d'une variété  $M$  hyperbolique de volume fini, la stratégie consiste à effectuer des obturations de Dehn sur toutes les composantes (toriques) de  $\partial M$ . Avec le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston (théorème 4.1.2), «presque toutes» les variétés obtenues sont fermées hyperboliques, et dans ce cas, leur groupe est Gromov-hyperbolique. On peut dès lors espérer se donner un nombre fini de telles variétés, afin de résoudre des problèmes algorithmiques dans leur groupe, (les groupes hyperboliques s'y prêtent particulièrement bien, cf. section 4.2), ce qui permettrait de donner une solution aux problèmes considérés dans  $\pi_1(M)$ .

Les deux premiers problèmes auxquels nous sommes confronté, afin de trouver de tels bons candidats, sont les suivants : d'une part, si  $\Gamma$  est Gromov-hyperbolique, nous devons en décider, d'autre part nous avons besoin pour travailler algorithmiquement sur  $\Gamma$  de connaître sa constante d'hyperbolicité  $\delta$ , ou du moins une majoration de celle-ci.

Avec le travail dû à Markov, Adjan, et Rabin (cf. [Mi2]), il est clair que dans la classe des présentations finies de groupes la propriété d'être hyperbolique est récursivement irreconnaissable. Il s'agit en effet d'une propriété dite de Markov (un groupe hyperbolique ne peut contenir  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ). Nous travaillons cependant, dans la classe des groupes de 3-variétés, et nous devons prendre garde de ne pas en déduire que dans cette classe être hyperbolique est irreconnaissable. En effet la propriété d'être un groupe de 3-variété, est également une propriété de Markov (le groupe d'une 3-variété ne peut contenir  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  (cf. [He])). De toute façon, nous n'avons pas besoin de décider de l'hyperbolicité, mais de le déterminer lorsque c'est le cas, *i.e.*, que la sous-classe des groupes hyperboliques, dans la classe des groupes de 3-variétés soit récursivement énumérable.

Nous donnons deux approches différentes pour résoudre ces problèmes. La première utilise des méthodes élaborées par D.epstein et D.Holt, utilisant la notion d'automaticité d'un groupe. La seconde utilise la structure plus restrictive de groupe de 3-variété hyperbolique fermée, et les travaux de R.Riley, (snap-pea) (cf. [Th2]). Dans le premier cas, nous n'avons besoin que d'une présentation finie du groupe, alors que dans le second cas, il est nécessaire de se donner la variété, par une triangulation, une décomposition de Heegard, ou une chirurgie sur un entrelac. Cependant, dans la pratique, on se donnera souvent – sinon toujours – une variété avant de se donner un groupe de 3-variété. Dans les deux cas, les algorithmes s'avèrent être efficaces, sur des machines de capacités relativement modestes, dans des cas simples. Seule une étude de la complexité – que nous ne ferons pas – pourrait nous permettre d'en dire davantage.

Nous commençons par exposer la méthode due à D.Epstein et D.Holt. Concernant les notions d'automaticités (que nous noterons en *italique*), et tous les faits énoncés, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de référence [CEHLPT]. Tous les algorithmes sont implémentables avec le logiciel KBMAG [Ho]. Un groupe hyperbolique est *automatique*. De plus, pour toute famille finie de générateurs, il est *short-lex auto-*

*matique*. Donnée une présentation finie, d'un groupe, s'il est short-lex automatique, il existe un algorithme qui permet de se donner des automates définissant cette structure (la pratique, montre même une étonnante efficacité de cet algorithme). P.Papasoglu, a récemment démontré l'équivalence entre la propriété d'être Gromov-hyperbolique, et la propriété d'être *strongly geodesically automatic* ([Pa]). Il suffit ainsi de décider si l'on a une telle structure. Ceci peut-être réalisé, en utilisant les algorithmes donnés dans [EH1] et [EH2]. Dans le cas où le groupe considéré n'est pas hyperbolique, cette procédure tourne indéfiniment, sans donner aucune réponse, mais dans le cas où le groupe est hyperbolique, cette procédure s'arrête. On peut alors utiliser l'algorithme figurant dans [EH1] et [EH2] pour déterminer la constante  $\delta$  d'hyperbolicité (ou une majoration de celle-ci). Nous résumons ces faits dans la proposition suivante.

**Proposition 4.3.4** *Soit  $\Gamma$  un groupe finiment présenté donné par une présentation finie. Il existe un algorithme, qui, si  $\Gamma$  est hyperbolique, en décide, et explicite une constante d'hyperbolicité  $\delta$  de  $\Gamma$  pour cette présentation.*

Nous donnons maintenant la deuxième approche. Elle est basée sur une procédure, due à R.Riley, permettant, donnée une variété hyperbolique de volume fini, par une triangulation (par exemple), de déterminer une structure hyperbolique complète. Bien qu'efficace que dans des cas relativement simple (snap-pea), il s'avère qu'une telle procédure est toujours théoriquement réalisable. L'algorithme fournit un polyèdre fondamental fini et les applications de recollement (applications de pairage de face). Rappelons qu'une 3-variété hyperbolique de volume fini, admet toujours un polyèdre fondamental convexe, exact, fini (cf [Ra]). Nous résumons cette discussion dans la proposition suivante (cf. [Th2]).

**Proposition 4.3.5** *Donnée une variété hyperbolique de volume finie (par une triangulation par ex.), il existe un algorithme qui fournit une structure hyperbolique, ainsi qu'un polyèdre fondamental fini.*

Une variété hyperbolique fermée, est le quotient de  $\mathbb{H}^3$  par un sous-groupe discret sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , agissant de manière cocompacte. Le résultat suivant, déjà remarqué par Milnor, permet de déduire que son groupe fondamental est hyperbolique au sens de Gromov.

**Théorème 4.3.1** *Soit  $X$  un espace géodésique propre, et  $\Gamma$  un groupe discret d'isométrie de  $X$ . Si  $X/\Gamma$  est compact, alors  $\Gamma$  est de type fini, et  $\Gamma$  muni de la métrique du mot (pour une famille génératrice quelconque), est quasi-isométrique à  $X$ .*

En affinant ce résultat, on peut, donné un polyèdre fondamental fini, estimer la constante d'hyperbolicité  $\delta$ .

**Proposition 4.3.6** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , agissant par isométrie, de façon cocompacte sur  $\mathbb{H}^3$ . Alors  $\Gamma$  est Gromov-hyperbolique. Si l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^3$  admet un polyèdre fondamental fini  $P$ , et si l'on munit  $\Gamma$  de la famille génératrice associée aux pairages de faces, alors  $\Gamma$  est  $\delta$ -hyperbolique, et connaissant  $P$ , on peut trouver  $m, M > 0$ , tels que  $m < \delta < M$ .*

**Démonstration** La première partie de la proposition provient du théorème 4.3.1. On suppose que l'on connaît un polyèdre fini  $P$ , et les applications de pairage de face, donnant une structure hyperbolique pour  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . Si l'on considère le sous-ensemble  $S$  de  $\Gamma$ , obtenu à partir des pairages de face, il est facile de vérifier que  $S$  est une famille génératrice (finie) pour  $\Gamma$ . Posons,

$$R = \max\{d(x_0, x) | x \in P\}$$

$$m = \min\{d(x_0, x) | x \in \partial P\}$$

Si  $A$  et  $B$  sont des faces de  $P$ , on pose  $\angle(A, B)$  qui est soit  $\pi$  si  $A$  et  $B$  n'ont pas d'arête en commun, soit, si  $A$  et  $B$  ont une arête  $e$  en commun, l'angle diédral entre  $A$  et  $B$  en  $e$ . Remarquer que  $A$  et  $B$  ne peuvent pas avoir plus d'une arête en commun. On pose

$$\alpha = \min\{\angle(A, B) | A, B \text{ faces de } P\}$$

On pose

$$\bar{S} = \{\gamma \in \Gamma | \gamma.P \cap P \neq \emptyset\}$$

Puisque  $\Gamma$  est discret,  $\bar{S}$  est fini, et bien sûr,  $S \subset \bar{S}$ . Soit  $N$  le plus petit entier tel que  $N.\alpha \geq 2\pi$ . Alors il est facile de voir qu'un élément de  $\bar{S}$  se décompose en un produit de moins de  $N$  éléments de  $S$ .

On pose  $r = \inf\{d(P, \gamma.P) | \gamma \in \Gamma \setminus \bar{S}\}$ . Alors, on a  $m \leq r \leq R$ . On pose  $\lambda = \min\{d(x_0, \gamma.x_0) | \gamma \in \bar{S}\}$ , alors  $2m \leq \lambda \leq 2R$ .

La démonstration du théorème 4.3.1 consiste en fait à montrer (sous l'hypothèse plus faible que  $P$  est une boule fermée de rayon  $R$ ), que

- (a)  $\bar{S}$  engendre  $\Gamma$ , et que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $d_{\bar{S}}(1, \gamma) \leq \frac{1}{r}|x_0 - \gamma.x_0| + 1$
- (b)  $|x_0 - \gamma.x_0| \leq \lambda d_{\bar{S}}(1, \gamma)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .
- (c) l'injection  $\Gamma.x_0 \longrightarrow \mathbb{H}^3$  est  $R$ -quasi-surjective.

Nous renvoyons le lecteur à [GdlH] pour une démonstration de ces résultats.

Puisque

$$d_{\bar{S}}(1, \gamma) \leq d_S(1, \gamma) \leq N.d_{\bar{S}}(1, \gamma)$$

on a

$$\frac{1}{2R}|x_0 - \gamma.x_0| \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{N}{m}|x_0 - \gamma.x_0| + N$$

Ainsi l'application  $(\Gamma, S) \longrightarrow \mathbb{H}^3$  donnée en c) est une quasi-isométrie, dont on peut exprimer les coefficients en fonction de  $R, N, m$ . Connaissant  $P$ , on peut déterminer  $R, N, m$ , et alors, sachant que  $\mathbb{H}^3$  est log 2-hyperbolique, déterminer  $\delta$  tel que  $(\Gamma, S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique (cf [GdlH]) ■

### 4.3.3 Algorithmes pour des variétés hyperboliques de volume fini

Les problèmes du mot et de la conjugaison dans le groupe d'une 3-variété hyperbolique de volume fini, peuvent être résolus en utilisant la théorie des groupes automatiques ([CEHLPT]). Ainsi le résultat suivant est un corollaire immédiat du théorème 11.4.1 de [CEHLPT].

**Proposition 4.3.7** *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de volume fini est biautomatique. En particulier les problèmes du mot et de la conjugaison sont résolubles.*

Ceci nous permet de donner une solution simple au problème du mot généralisé d'une composante périphérale  $T$  dans  $\pi_1(M)$ .

**Proposition 4.3.8 (Détermination des éléments périphéraux)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique, de volume fini, ouverte, et soit  $T$  une composante périphérale. Donné  $u \in \pi_1(M)$ , on peut décider si  $u \in T$ .*

**Démonstration** Avec la proposition 4.3.1, le centralisateur d'un élément non trivial de  $T$  est  $T$ . Pour décider si  $u \in T$ , il suffit donc de décider avec l'algorithme du mot si  $utu^{-1}t^{-1} = 1$  pour un élément non trivial  $t \in T$ . ■

Nous souhaitons maintenant résoudre les algorithmes de détermination des 2-cosets, et des classes périphérales dans le groupe d'une variété hyperbolique de volume fini  $M$ , à bord non vide. Pour cela, nous allons devoir utiliser toutes les notions précédemment établies durant ce chapitre. La stratégie consiste à travailler dans des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques fermées obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , l'avantage étant que de tels groupes sont hyperboliques au sens de Gromov. Ces groupes doivent en outre, pour donner une solution dans  $\pi_1(M)$ , vérifier certaines conditions supplémentaires (dans un sens, être algébriquement «suffisamment proches» de  $\pi_1(M)$ ). Commençons par voir comment se donner de tels groupes.

Considérons une 3-variété  $M$  hyperbolique de volume fini, à bord non vide. Soient  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$  les composantes (toriques, incompressibles) de  $\partial M$ . On suppose donnés, une présentation finie de  $\pi_1(M)$ , et un système périphéral, *i.e.* les monomorphismes :

$$i_{1*} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$$

$$i_{2*} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$$

$$\vdots$$

$$i_{n*} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M)$$

où  $i_j$  désigne le plongement de  $\mathcal{T}_j$  dans  $M$ . Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , on notera  $m_j = i_{j*}((1,0))$ ,  $l_j = i_{j*}((0,1))$ , et  $T_j = i_{j*}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ .

Une variété fermée  $N$  obtenue par chirurgie sur  $M$  est déterminée par  $n$  éléments de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $(a_1, b_1), \dots, (a_j, b_j), \dots, (a_n, b_n)$ , vérifiant en outre, pour tout  $j$ , que  $a_j, b_j$  sont premiers entre eux, ou  $a_j = 0, b_j = 1$ , ou  $a_j = 1, b_j = 0$ . Le groupe fondamental

de  $N$  est obtenu à partir d'une présentation de  $\pi_1(M)$ , en ajoutant les relations  $m_j^{a_j} l_j^{b_j} = 1$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

On énumère les groupes des 3-variétés fermées obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , en énumérant les pentes de chirurgie. Pour chaque présentation  $G \cong \langle S \mid R \rangle$  obtenue, on utilise la proposition 4.3.4, pour déterminer — lorsque c'est le cas — si  $\langle S \mid R \rangle$  est une présentation de groupe hyperbolique, et une constante  $\delta \geq 0$ , telle que  $(G, d_S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique. On souhaite déterminer deux variétés fermées obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , dont les groupes sont hyperboliques, et vérifient certaines propriétés.

Supposons que l'on ait déterminé que pour une variété  $N_1$  obtenue par obturation de Dehn sur  $M$ ,  $(\pi_1(N_1), d_S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique. Notons  $\rho_1 : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N_1)$  la surjection canonique. On souhaite avoir les conditions suivantes portant sur les sous-groupes images par  $\rho_1$  des sous-groupes périphéraux de  $\pi_1(M)$  :

- 1) Pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $\rho_1(T_j)$  est un sous-groupe cyclique infini de  $\pi_1(N_1)$ .
- 2) Si  $u \in \pi_1(N_1)$  conjugue deux éléments  $t, t'$  de  $\rho_1(T_j)$ , alors  $t = t'$  et  $u \in \rho_1(T_j)$ .
- 3) Pour  $i \neq j$ , aucun élément non trivial de  $\rho_1(T_i)$  n'est conjugué à un élément de  $\rho_1(T_j)$ .

Si  $(a_j, b_j)$  est la pente de chirurgie sur  $\mathcal{T}_j$ , et si  $c_j, d_j$  sont des entiers tels que  $a_j d_j - b_j c_j = 1$ , alors  $\rho_1(m_j^{c_j} l_j^{d_j})$  engendre  $\rho_1(T_j)$ . Puisque  $\pi_1(N_1)$  est  $\delta$ -hyperbolique, on peut appliquer la proposition 4.2.4 (déterminer la torsion) à  $\rho_1(m_j^{c_j} l_j^{d_j})$  pour décider de la condition 1), et le corollaire 4.2.4 (conjugaisons périphérales I) pour décider de la condition 2). Pour la condition 3), on appliquera le corollaire 4.2.5 (conjugaisons périphérales II) à  $\rho_1(m_i^{c_i} l_i^{d_i})$  et  $\rho_1(m_j^{c_j} l_j^{d_j})$ . Avec le corollaire 4.1.2 du théorème de chirurgie de Thurston, et la proposition 4.3.2 (comportement algébrique asymptotique I), on sait que l'on finira par trouver deux variétés hyperboliques fermées  $N_1, N_2$ , dont les groupes fondamentaux vérifient ces conditions, et vérifiant en outre que pour chaque composante  $\mathcal{T}$  de  $\partial M$ , les pentes de chirurgie associées à  $N_1$  et  $N_2$  sur  $\mathcal{T}$  sont distinctes. La donnée de  $N_1$  et  $N_2$ , nous permettra d'appliquer une résolution dans  $\pi_1(M)$  aux algorithmes de détermination des 2-cosets II, et de détermination des classes périphérales (cf. propositions 4.3.10 et 4.3.11).

L'algorithme de détermination des 2-cosets I, apporte une difficulté supplémentaire, et ne peut être résolu à ce stade. Cela provient du fait que si l'on considère les variétés  $N_1, N_2$ , comme déterminées ci-dessus, et un élément  $x \in \pi_1(M)$ , on peut avoir  $x \notin T$  et  $\rho_1(x) \in \rho_1(T) \subset \pi_1(N_1)$ ,  $\rho_2(x) \in \rho_2(T) \subset \pi_1(N_2)$  (cf. remarque p.103). Notre technique consistant à chercher des solutions dans  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$  ne s'applique plus, car les algorithmes ne sont plus à même de fournir d'unique solutions. Aussi, pour déterminer pour une composante  $T$ , et  $u, v \in \pi_1(M) - T$ , les éléments  $t_1, t_2 \in T$ , tels que  $u = t_1.v.t_2$ , il nous faut déterminer les variétés  $N_1, N_2$ , ayant des groupes Gromov-hyperboliques, vérifiant les conditions 1) et 2) ainsi que la condition supplémentaire :

- 4) Si  $u, v \notin T$ , alors on n'a pas  $\rho_1(u), \rho_1(v) \in \rho_1(T) \subset \pi_1(N_1)$ , ou  $\rho_2(u), \rho_2(v) \in \rho_2(T) \subset \pi_1(N_2)$ .

Ceci est possible, avec la proposition 4.3.3 (comportement algébrique asymptotique II), en appliquant le même raisonnement que précédemment, et le corollaire 4.2.2

(problème du mot généralisé de  $\mathbb{Z}$  dans  $G$ ). Ce qui est préjudiciale, c'est que les variétés  $N_1$  et  $N_2$  dépendent de  $u$  et  $v$ . Ainsi pour chaque couple d'éléments  $u, v$ , il faudra déterminer des variétés  $N_1$  et  $N_2$ , ce qui augmente considérablement la complexité de l'algorithme. Nous reviendrons sur ce point dans la remarque qui clôture cette section.

**Proposition 4.3.9 (Détermination des doubles cosets I)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, à bord non vide, et  $T$  une composante périphérale. Donné  $u, v \in \pi_1(M) - T$ , on peut décider si il existe  $t, t' \in T$ , tels que  $u = tv t'$ . Si un tel couple existe, il est unique, et l'algorithme peut le déterminer.*

**Démonstration** L'unicité provient de la proposition 4.3.1a). On se donne  $u$  et  $v$  dans  $\pi_1(M)$ . Comme décrit ci-dessus, on détermine les variétés  $N_1, N_2$ . Elles ont des groupes fondamentaux hyperboliques au sens de Gromov, qui vérifient les conditions 1), 2), 4).

Dans  $\pi_1(N_1)$  (respectivement  $(\pi_1(N_2))$ ), si il existe  $t, t' \in \rho_1(T)$  tels que  $\rho_1(u) = t\rho_1(v)t'$ , alors ils sont uniques. En effet, sinon,  $\rho_1(v)$  conjugue deux éléments non triviaux de  $\rho_1(T)$ . Alors, avec la proposition 4.3.1a),  $\rho_1(v) \in \rho_1(T)$ , cas que l'on a exclu.

Prenons  $m, l$  une base pour  $T$  dans  $\pi_1(M)$ . On se donnera un élément de  $T$ ,  $m^a, l^b$  par le couple d'entiers  $(a, b)$ . Supposons que  $N_1$  soit obtenu par une obturation de pente  $(m_1, l_1)$  sur la composante au bord de  $M$  associée à  $T$ , et que  $N_2$  soit obtenue par une obturation de pente  $(m_2, l_2)$ . On prend  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , de façon à ce que  $(m_1, l_1), (a_1, b_1)$  d'une part,  $(m_2, l_2), (a_2, b_2)$  d'autre part soient une base de  $T$ . C'est possible puisque  $m_1 \wedge l_1 = 1$  et  $m_2 \wedge l_2 = 1$ . On note  $h_1 = \rho_1(m^{a_1} l^{b_1})$  et  $h_2 = \rho_2(m^{a_2} l^{b_2})$ . Ce sont les générateurs respectifs de  $\rho_1(T), \rho_2(T)$ .

Si

$$u = m^r l^s v m^{r'} l^{s'} \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

alors

$$\rho_1(u) = h_1^{n_1} \rho_1(v) h_1^{n'_1} \quad \text{dans } \pi_1(N_1)$$

et

$$\rho_2(u) = h_2^{n_2} \rho_2(v) h_2^{n'_2} \quad \text{dans } \pi_1(N_2)$$

et si  $(r, s), (r', s')$  existent, alors  $(n_1, n'_1)$  et  $(n_2, n'_2)$  existent et sont uniques.

On a d'une part

$$(r, s) = n_1(a_1, b_1) + x_1(m_1, l_1)$$

$$(r', s') = n'_1(a_1, b_1) + y_1(m_1, l_1)$$

et d'autre part

$$(r, s) = n_2(a_2, b_2) + x_2(m_2, l_2)$$

$$(r', s') = n'_2(a_2, b_2) + y_2(m_2, l_2)$$

On obtient le système à deux inconnues  $x_1, x_2$

$$\begin{cases} m_1 x_1 - m_2 x_2 = n_2 a_2 - n_1 a_1 \\ l_1 x_1 - l_2 x_2 = n_2 b_2 - n_1 b_1 \end{cases}$$

ainsi que le système d'inconnues  $y_1, y_2$

$$\begin{cases} m_1 y_1 - m_2 y_2 = n'_2 a_2 - n'_1 a_1 \\ l_1 y_1 - l_2 y_2 = n'_2 b_2 - n'_1 b_1 \end{cases}$$

On rappelle (corollaire 4.1.2) que l'on a construit  $N_1, N_2$  avec des pentes de chirurgie distinctes, et donc le déterminant des deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(m_1, l_1)$  et  $(m_2, l_2)$  est non nul. Les systèmes ci dessus admettent donc d'unique couples solutions  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ , rationnels. Si  $x_1, x_2, y_1, y_2$  ne sont pas entiers, alors il n'existe pas  $t, t' \in T$  tels que  $u = tv t'$ . Sinon, on peut déterminer d'unique couples  $(r, s), (r', s')$ , et il suffit alors d'utiliser l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$  pour déterminer si  $u = m^r l^s v m^{r'} l^{s'}$ . ■

**Proposition 4.3.10 (Détermination des double-cosets II)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique, de volume fini, ouverte, et soient  $T, T'$  deux composantes périphérales distinctes. Donnés  $u, v \in \pi_1(M)$ , on peut décider si il existe  $t \in T, t' \in T'$ , tel que  $u = tv t'$  dans  $\pi_1(M)$ . Si un tel couple  $(t, t')$  existe, alors il est unique et l'algorithme peut le déterminer.*

**Démonstration** L'unicité provient de la proposition 4.3.1 b).

On se donne deux variétés fermées  $N_1, N_2$ , obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ , et  $\rho_i : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N_i)$  pour  $i = 1, 2$ , tels que :

- (i) On dispose d'une constante  $\delta > 0$ , et de familles génératrices finies,  $S_1, S_2$ , respectivement pour  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$ , de façon ce que  $(\pi_1(N_1), d_{s_1})$  et  $(\pi_1(N_2), d_{s_2})$  soient  $\delta$ -hyperboliques.
- (ii) Les groupes  $\rho_i(T)$  et  $\rho_i(T')$  sont cycliques infinis.
- (iii) Aucun élément non trivial de  $\rho_i(T)$  n'est conjugué à un élément de  $\rho_i(T')$  pour  $i = 1, 2$ .
- (iv) Pour toute composante au bord  $\mathcal{T}$  de  $M$ ,  $N_1$  et  $N_2$  ont des pentes de chirurgies sur  $\mathcal{T}$ , distinctes.

Notons  $m, l$  une base pour  $T$  et  $\mu, \lambda$  une base pour  $T'$ , dans  $\pi_1(M)$ . Dans la suite, un élément de  $T$  (respectivement  $T'$ ),  $m^a l^b$  (respectivement  $\mu^a \lambda^b$ ) sera donné par  $(a, b)$ . On suppose que  $N_1$  est obtenu sur  $M$ , avec pour pentes de chirurgie  $(m_1, l_1)$  sur  $T$  et  $(\mu_1, \lambda_1)$  sur  $T'$ , et que  $N_2$  est obtenu avec pour pentes  $(m_2, l_2)$  sur  $T$  et  $(\mu_2, \lambda_2)$  sur  $T'$ .

On note  $(a_1, b_1)$  un couple d'entiers tel que  $m_1 b_1 - l_1 a_1 = 1$  (un tel couple existe puisque  $m_1 \wedge l_1 = 1$ ), et  $(\alpha_1, \beta_1)$  un couple tel que  $\mu_1 \beta_1 - \lambda_1 \alpha_1 = 1$ . Alors  $(m_1, l_1)$  et  $(a_1, b_1)$  constituent une base de  $T$  et  $(\mu_1, \lambda_1)$  et  $(\alpha_1, \beta_1)$  constituent une base de  $T'$ . On note  $h_1 = \rho_1(m^{a_1} l^{b_1}), \xi_1 = \rho_1(\mu^{\alpha_1} \lambda^{\beta_1})$ , les éléments d'ordre infini de  $\pi_1(N_1)$ .

Si

$$u = m^r l^s v \mu^p \lambda^\sigma \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

alors

$$\rho_1(u) = h_1^{n_1} \rho_1(v) \xi_1^{\eta_1} \quad \text{dans } \pi_1(N_1)$$

Puisque aucun élément non trivial de  $\rho_1(T)$  n'est conjugué à un élément de  $\rho_1(T')$ , s'il existe, le couple  $(n_1, \eta_1)$  est unique. On peut appliquer le corollaire 4.2.3 pour le



déterminer. On a alors,

$$(r,s) = n_1(a_1,b_1) + x_1(m_1,l_1)$$

$$(\rho,\sigma) = \eta_1(\alpha_1,\beta_1) + y_1(\mu_1,\lambda_1)$$

Si l'on considère, de même, les couples  $(a_2,b_2),(\alpha_2,\beta_2)$  tels que  $m_2b_2 - l_2a_2 = 1$  et  $\mu_2\beta_2 - \lambda_2\alpha_2 = 1$ , en appliquant le même procédé, on détermine, s'il existe, l'unique couple  $(n_2,\eta_2)$  tel que

$$\rho_2(u) = h_2^{n_2} \rho_2(v) \xi_2^{\eta_2} \quad \text{dans } \pi_1(N_2)$$

et alors

$$(r,s) = n_2(a_2,b_2) + x_2(m_2,l_2)$$

$$(\rho,\sigma) = \eta_2(\alpha_2,\beta_2) + y_2(\mu_2,\lambda_2)$$

On obtient le système à deux inconnues  $x_1, x_2$

$$\begin{cases} m_1x_1 - m_2x_2 = n_2a_2 - n_1a_1 \\ l_1x_1 - l_2x_2 = n_2b_2 - n_1b_1 \end{cases}$$

Les deux équations sont linéairement indépendantes si et seulement si  $(m_1,l_1) \neq \pm(m_2,l_2)$ . Puisque  $N_1, N_2$  sont obtenues par des pentes de chirurgie sur  $T$ , distinctes, on obtient un unique couple de rationnels  $(x_1, x_2)$ .

De la même façon, on obtient le système linéairement indépendant, d'inconnues  $y_1, y_2$ ,

$$\begin{cases} \mu_1y_1 - \mu_2y_2 = \eta_2\alpha_2 - \eta_1\alpha_1 \\ \lambda_1y_1 - \lambda_2y_2 = \eta_2\beta_2 - \eta_1\beta_1 \end{cases}$$

et l'unique couple de solutions,  $(y_1, y_2)$ . Si  $x_1, x_2, y_1, y_2$  ne sont pas des entiers, alors il n'existe pas  $t \in T, t' \in T'$ , tels que  $u = tv t'$ , sinon on détermine d'unique couples  $(r,s), (\rho,\sigma)$ , et il suffit alors d'utiliser l'algorithme du mot, pour décider si  $u = m^r l^s v \mu^\rho \lambda^\sigma$  dans  $\pi_1(M)$ . ■

**Proposition 4.3.11 (détermination des classes périphérales)** *Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique, de volume fini, à bord non vide, et soit  $T$  une composante périphérale. Donné  $u \in \pi_1(M)$ , on peut décider si  $u$  est conjugué à un élément de  $T$ . Si c'est le cas, il existe un unique conjugué de  $u$  dans  $T$ , et l'algorithme peut le déterminer.*

**Démonstration** Avec la proposition 4.3.1, deux éléments distincts de  $T$ , ont des classes de conjugaison distinctes, et donc dans le cas où  $u$  est conjugué à un élément de  $T$ , cet élément est unique.

On procède comme précédemment, en se donnant deux variétés fermées  $N_1, N_2$ , obtenues par chirurgie sur  $M$ , telles que  $\pi_1(N_1), \pi_1(N_2)$  soient  $\delta$ -hyperboliques, et si  $\rho_1 : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N_1)$  et  $\rho_2 : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N_2)$  sont les surjections canoniques,  $p_i(T_1), p_i(T_2)$  sont cycliques infinis, pour  $i = 1, 2$ .

Soit  $m, l$  une base pour  $T$  dans  $\pi_1(M)$ . On suppose que  $N_1, N_2$  ont pour pentes respectives sur  $T$ ,  $(m_1, l_1), (m_2, l_2)$ . On rappelle que l'on peut supposer ces pentes

distinctes. On note  $(a_1, b_1)$  un couple d'entier tel que  $m_1 b_1 - l_1 a_1 = 1$ . Alors les pentes  $(m_1, l_1)$  et  $(a_1, b_1)$  constituent une base de  $T$ . On note  $h_1 = \rho_1(a_1, b_1)$ . Cet élément engendre  $\rho_1(T)$ .

Si

$$u = v m^r l^s v^{-1} \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

alors

$$\rho_1(u) = \rho_1(v) h_1^{n_1} \rho_1(v)^{-1} \quad \text{dans } \pi_1(N_1)$$

Puisque  $\pi_1(N_1)$  est  $\delta$ -hyperbolique, on peut utiliser le corollaire 4.2.1 pour décider si  $\rho_1(u)$  est conjugué à une puissance de  $h_1$ . On obtient au plus deux entiers  $n$  tels que  $h_1^n$  soit conjugué à  $\rho_1(u)$ ; notons les  $n_1^1, n_1^2$ . On obtient au plus deux équations, d'inconnues  $r, s, x_1, x_2$

$$\begin{aligned} (r, s) &= n_1^1(a_1, b_1) + x_1(m_1, l_1) \\ (r, s) &= n_1^2(a_1, b_1) + x_2(m_1, l_1) \end{aligned}$$

On procède de façon analogue pour  $N_2$ . On pose  $(a_2, b_2)$  un couple tel que  $m_2 b_2 - l_2 a_2 = 1$ . On obtient au plus deux entiers  $n_2^1, n_2^2$ , et deux équations, d'inconnues  $r, s, y_1, y_2$

$$\begin{aligned} (r, s) &= n_2^1(a_2, b_2) + y_1(m_2, l_2) \\ (r, s) &= n_2^2(a_2, b_2) + y_2(m_2, l_2) \end{aligned}$$

On obtient alors au plus 4 systèmes de deux équations linéairement indépendantes, à deux inconnues  $x_i, y_j$ ,

$$\begin{cases} m_1 x_i - m_2 y_j = n_2^j a_2 - n_1^j a_1 \\ l_1 x_i - l_2 y_j = n_2^j b_2 - n_1^j b_1 \end{cases}$$

pour  $i = 1, 2, j = 1, 2$ . On obtient ainsi, au plus 4 couples  $(r, s)$ , éventuellement conjugués à  $u$ . Il suffit alors de leur appliquer l'algorithme de la conjugaison pour déterminer, s'il existe, un tel élément conjugué à  $u$ . ■

**Remarque :** Pour résoudre les algorithmes de détermination des 2-cosets II, et de détermination des classes périphérales, on trouve deux variétés  $N_1, N_2$ , dont les groupes sont hyperboliques et vérifient les conditions 1), 2), 3). Certes, déterminer de telles variétés constitue un algorithme complexe, peu efficient dans la pratique. Mais une fois que les variétés  $N_1, N_2$  (ou plutôt des coefficients de chirurgie) ont été déterminées, elles sont fixées, et la complexité des algorithmes de détermination des 2-cosets II, et des classes périphérales, est fonction linéaire de la complexité des algorithmes analogues dans un groupe Gromov-hyperbolique, ce qui constitue le meilleur résultat que nous eussions pu escompter. Cet argument n'est plus valide, quant à la complexité de l'algorithme de détermination des 2-coset I. A chaque implémentation, il pourra être nécessaire de trouver des variétés  $N_1, N_2$  satisfaisants 1), 2), 3) et surtout 4). Ce fait accroît – semble-t-il – considérablement la complexité de l'algorithme, et marque une contrainte importante à l'efficiency de cet algorithme, contrastant avec les autres cas.

Pour contourner cette difficulté, tout en gardant la même stratégie, il aurait été nécessaire d'avoir pour une suite  $(N_p)_p$  de variétés hyperboliques fermées, convergeant vers  $M$ , l'existence d'une constante  $N > 0$ , telle que si  $u \in \pi_1(M) - T$ , il

existe  $i$ ,  $0 < i \leq N$ , tel que  $\rho_i(u) \notin \rho_i(T)$ , dans  $\pi_1(N_i)$ . Comme nous le montrons dans la remarque p.103, une telle constante  $N$  ne peut jamais exister.

# Chapitre 5

## Le cas des fibrés de Seifert

Ce chapitre est consacré au cas des espaces fibrés de Seifert. Nous y résolvons les algorithmes élémentaires pour le groupe d'un fibré de Seifert.

Nous commençons par rappeler dans les trois premières sections les notions qui nous seront nécessaires. Dans la première section, nous rappelons ce qu'est une fibration de Seifert, le système d'invariants d'une fibration, ainsi que des propriétés topologiques générales vérifiées par les espaces fibrés de Seifert. Dans la deuxième section, nous donnons une présentation canonique pour le groupe fondamental d'une 3-variété munie d'une fibration de Seifert. Nous rappelons la caractérisation algébrique du groupe  $\pi_1(M)$  d'un fibré de Seifert  $M$  : il contient un sous-groupe normal cyclique, que nous appellerons la fibre  $N$ . Le quotient de  $\pi_1(M)/N$  est un groupe Fuchsien, que nous étudierons plus en détail dans la troisième section. Ce fait servira d'approche à l'étude du groupe  $\pi_1(M)$  qui sera poursuivie dans la suite de ce chapitre. Nous nous restreindrons au cas où  $\pi_1(M)$  est infini.

Dans la quatrième section (§5.4), nous établissons des propriétés algébriques de  $\pi_1(M)$  : structure du centralisateur d'un élément de  $\pi_1(M)$ , et surtout caractérisation algébrique des anneaux essentiels dans un fibré de Seifert (anneaux essentiels dans un Seifert, proposition 5.4.2), qui nous sera utile dans les chapitre 6 et 7.

Les deux dernières sections sont consacrées à la résolution des algorithmes élémentaires. L'idée consiste à réduire ces algorithmes à des algorithmes dans le groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ . Les algorithmes de détermination des 2-cosets, et des classes périphérales ne présentent aucune difficulté, — car lorsque  $M$  est à bord non vide,  $\pi_1(M)/N$  est un produit libre de groupes cycliques —, et il seront résolus dans la dernière section (§5.6).

L'algorithme de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$ , est lui bien plus délicat à traiter. Sa résolution occupera toute la section §5.5. Notons  $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$  la surjection canonique. Si  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , alors  $\rho(u) \sim \rho(v)$  dans  $\pi_1(M)/N$ , ce dont on peut décider. Si l'on sait que  $\rho(u) \sim \rho(v)$  dans  $\pi_1(M)/N$ , peut-on décider si  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ ?... Oui, si l'on connaît précisément le centralisateur de  $\rho(v)$  dans  $\pi_1(M)/N$  (cf. proposition 5.5.1). Dans la plupart des cas,  $\pi_1(M)/N$  est hyperbolique au sens de Gromov, et le traitement des groupes hyperboliques dans la section 4.2 nous permet de déterminer le centralisateur d'un élément dans  $\pi_1(M)/N$  et donc de résoudre le problème de la conjugaison dans  $\pi_1(M)$ . Seulement 7 cas

sont récalcitrants, les groupes Fuchsien cristallographiques. Nous sommes amenés à déterminer séparément pour chacun d'entre eux, le centralisateur d'un élément arbitraire, ce qui nécessite malheureusement de nombreuses pages de calculs. Mais, pourrait-on dire, le jeu en vaut la chandelle, car les résultats sont consignés sous forme d'un tableau fournissant précisément le centralisateur d'un élément arbitraire de l'un de ces groupes, de sorte qu'un algorithme n'est plus nécessaire (proposition 5.5.2).

## 5.1 Définition et propriétés topologiques

On se donne le disque  $D^2$  comme le disque complexe  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$ . Un **tore solide fibré**, d'indice  $(p, q)$ , où  $p, q$  sont des entiers premiers entre eux, est le quotient de  $D^2 \times I$  par l'application de  $D^2 \times \{-1\}$  dans  $D^2 \times \{1\}$ , qui à  $(z, -1)$  associe  $(\exp(2i\pi p/q).z, 1)$ . L'image de  $\{0\} \times I$  est une courbe fermée simple, appelée axe du tore. Si  $z \neq 0$ , l'image de  $z \times I \cup \dots \cup \exp(2i\pi kp/q).z \times I \cup \dots \cup \exp(2i\pi(q-1)/q).z \times I$  est une courbe fermée simple. Ainsi, un tore solide fibré, est réunion disjointe de courbes fermées simples, que l'on appellera les fibres. L'axe du tore, est un fibre dite exceptionnelle, si  $p$  n'est pas un multiple de  $q$ .

A homéomorphisme préservant les fibres près, on peut supposer que  $q > 0$  et que  $0 < p \leq q/2$ . De plus si  $T$  est un tore solide fibré de type  $(p, q)$ , et  $T'$  est un tore solide fibré de type  $(p', q')$ , avec  $0 < p \leq q/2$ , et  $0 < p' \leq q'/2$ , alors il existe un homéomorphisme préservant les fibres entre  $T$  et  $T'$ , si et seulement si  $p = p'$  et  $q = q'$ . Ainsi, dans la suite, nous ne considérerons que  $(p, q)$  avec  $0 < p \leq q/2$ .

Un **fibré de Seifert** (orientable), est une 3-variété compacte (orientable)  $M$ , qui est réunion disjointe de courbes fermées simples, appelées les fibres, de façon à ce que toute fibre  $c$  admette dans  $M$  un voisinage fermé  $V_c$  constitué de fibres, qui est l'image d'un tore solide fibré, par un homéomorphisme  $\phi$  préservant les fibres.

On peut vérifier que pour une fibre  $c$  donnée, le type  $(p, q)$  du tore solide fibré ne dépend pas du choix du voisinage  $V_c$ . Ainsi on pourra parler du type  $(p, q)$  d'une fibre, mais on parlera surtout de l'indice  $q$  de la fibre  $c$ . On dira que  $c$  est une fibre régulière (respectivement exceptionnelle), si  $q = 1$  (respectivement  $q > 1$ ). Dans un voisinage fibré d'une fibre exceptionnelle, toutes les autres fibres sont régulières. L'ensemble des voisinages fibrés des fibres de  $M$ , donnant un recouvrement de  $M$ , par compacité il y a un nombre fini de fibres exceptionnelles.

Si on identifie dans  $M$ , chaque fibre en un point, on obtient un espace quotient, qui est une surface  $B$  (éventuellement non-orientable), appelée la base. On dénote l'application d'identification par  $p : M \longrightarrow B$ , et on l'appelle projection canonique. La base  $B$  est à bord non vide, si et seulement si  $M$  est à bord non vide. Par définition, le bord d'un fibré de Seifert  $M$  est réunion disjointe de fibres régulières de la fibration. Ainsi, on peut munir toute composante connexe de  $\partial M$  d'une structure de  $S^1$ -fibré sur le cercle, dont la projection canonique, est la restriction de la projection canonique  $p : M \longrightarrow B$ . Les composantes de  $\partial M$  sont donc des tores, fibrés en fibres régulières.

On munit implicitement un fibré de Seifert  $M$ , d'une fibration de Seifert, c'est

à dire d'une partition de  $M$  en fibres, pour laquelle  $M$  est un fibré de Seifert. Deux fibrés de Seifert  $M$  et  $M'$  sont dit équivalents, s'il existe un homéomorphisme préservant les fibres entre  $M$  et  $M'$ . Si  $M = M'$  on dira que les fibrations sont équivalentes. Un fibré de Seifert peut être muni de plusieurs fibrations non équivalentes.

La première question que l'on peut se poser, est la suivante : peut-on déterminer un système d'invariants complet, d'homéomorphisme préservant les fibres, d'une fibration de Seifert d'une variété  $M$ ? Clairement le type  $(p, q)$  d'une fibre, est invariant par homéomorphisme préservant les fibres, et donc le nombre de fibres exceptionnelles aussi ; la classe d'homéomorphisme de la base, est aussi invariant à homéomorphisme préservant les fibres près. La réponse est affirmative, démontrée par Seifert (cf. [Sei]). Un espace fibré de Seifert muni d'une fibration est uniquement déterminé par le système d'invariants (théorème 5, [Sei]) :

$$\begin{aligned} (o, g, p, b \mid \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_q, \beta_q) \\ (n, g, p, b \mid \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_q, \beta_q) \end{aligned}$$

Le premier cas a lieu lorsque la base  $B$  est orientable ( $o$  pour orientable), et le second lorsque  $B$  est non-orientable ( $n$  pour non-orientable). L'entier  $g$  est le genre de la base,  $p$  est le nombre de composantes au bord,  $q$  est le nombre de fibres exceptionnelles,  $\alpha_i$  est l'indice de la  $i^{\text{ème}}$  fibre exceptionnelle,  $0 < \beta_i < \alpha_i$ , et  $(\alpha_i, \beta_i)$  déterminent uniquement son type. Si dans  $M$  on retire un voisinage  $V_c$  homéomorphe à un tore solide, de chaque fibre exceptionnelle  $c$ , la variété  $\overline{M}$  obtenue est un  $S^1$ -fibré. Sa structure de  $S^1$ -fibré est caractérisée par sa base, et son nombre d'Euler (ou indice de recollement). L'entier  $b$  caractérise cet indice de recollement.

La seconde question que l'on peut se poser, est la suivante : quand une variété  $M$  peut-elle admettre plusieurs fibrations non équivalentes? Par exemple, un tore solide admet une infinité de fibrations non équivalentes, ayant pour base un disque et au plus une fibre exceptionnelle. De tels espaces sont connus et classifiés, et en fait, représentent une exception (théorème VI.17, [Ja]).

**Théorème 5.1.1 (non-unicité d'une fibration de Seifert)** *Soient  $M$  et  $N$  des fibrés de Seifert, et  $f : M \longrightarrow N$  un homéomorphisme. Soit il existe un homéomorphisme qui préserve les fibres, de  $M$  dans  $N$ , soit  $M$  et  $N$  sont homéomorphes à l'une des variétés suivantes :*

- (i) *Un tore solide.*
- (ii) *Un espace lenticulaire.*
- (iii) *Un  $I$ -fibré non trivial, sur la bouteille de Klein.*
- (iv) *Le double d'un  $I$ -fibré non trivial, sur la bouteille de Klein.*
- (v) *Une variété prisme, i.e. un fibré de Seifert ayant pour base  $S^2$ , et 3 fibres exceptionnelles d'indices 2, 2 et  $\alpha > 1$ .*

Dans la suite, nous considérerons un fibré de Seifert  $M$  muni d'une fibration. La proposition suivante constitue le lemme VI.7 de [Ja].

**Proposition 5.1.1** *Un fibré de Seifert, est soit irréductible soit homéomorphe à  $S^1 \times S^2$  ou à  $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$ .*

Puisque toute 3-variété irréductible, à bord torique est soit un tore solide, soit à bord incompressible, on obtient :

**Proposition 5.1.2** *Pour un fibré de Seifert  $M$ ,  $\chi(M) = 0$  ; de plus, soit  $M$  est un tore solide, soit  $\partial M = \emptyset$ , soit  $\partial M$  est incompressible.*

Ainsi, tout fibré de Seifert  $M$  à bord non vide, est Haken, et soit  $M$  est un tore solide, soit  $M$  est  $\partial$ -irréductible. Dans le cas général, on a le résultat qui suit.

**Théorème 5.1.2** *A l'exception des espaces lenticulaires, et de  $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$ , un fibré de Seifert  $M$ , est soit Haken, soit a pour base  $S^2$  et exactement 3 fibres exceptionnelles. Dans ce dernier cas,  $M$  est Haken ssi  $H_1(M, \mathbb{Z})$  est infini.*

Ainsi, la plupart des espaces fibrés de Seifert sont Haken. C'est la raison pour laquelle le système d'invariants de Seifert est devenu quelque peu désuet, au profit du groupe fondamental et d'un système périphéral.

## 5.2 Le groupe d'un fibré de Seifert

Le groupe fondamental d'un espace fibré de Seifert  $M$ , muni d'une fibration, admet une présentation canonique, caractérisée par les invariants de Seifert de  $M$ . Le théorème qui suit est un résultat bien connu, qui constitue sous diverses formes les résultats VI.9 et VI.10 de [Ja], le théorème 12.1 de [He], le §10 de [Sei], ou le §5.3 de [Or].

**Théorème 5.2.1** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert, orientable, ayant  $q$  fibres exceptionnelles,  $p$  composantes au bord, et dont la base a pour genre  $g$ . Alors  $\pi_1(M)$  admet la présentation (1) ou (2), suivant si la base est orientable ou non.*

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h \mid$$

$$[a_i, h], [b_i, h], [c_j, h], [d_k, h]; c_j^{\alpha_j} = h^{\beta_j}; h^b = \left( \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right) c_1 \cdots c_q d_1 \cdots d_p \rangle \quad (1)$$

$$\langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h \mid$$

$$a_i h a_i^{-1} = h^{-1}; [c_j, h]; [d_k, h]; c_j^{\alpha_j} = h^{\beta_j}; h^b = \left( \prod_{i=1}^g a_i^2 \right) c_1 \cdots c_q d_1 \cdots d_p \rangle \quad (2)$$

où  $1 \leq i \leq g$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq k \leq p$ , où  $\alpha_j$  est l'indice de la  $j^{\text{ième}}$  fibre exceptionnelle,  $0 < \beta_j < \alpha_j$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , et  $b$  et  $\beta_1, \dots, \beta_q$  sont caractérisés par les invariants de la fibration de  $M$ .

De plus, on peut choisir des représentants, de façon à ce que  $h$  soit la classe de  $n$ 'importe quelle fibre régulière, et si  $T_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  composante de  $\partial M$ ,  $i_*(\pi_1(T_k))$  soit engendré par  $d_k$  et  $h$ .

**Remarque 1 :** Au vu de ces présentations, il apparaît que  $h$  engendre un sous-groupe normal  $N$  de  $\pi_1(M)$ . On appelle  $N$  la **fibre** de  $\pi_1(M)$ . Si de surcroît  $B$  est orientable, alors  $N$  est dans le centre de  $\pi_1(M)$ .

Si  $\pi_1(M)$  est infini, alors  $h$  est d'ordre infini (lemme II.4.2 (i), [JS]). Dans ce cas, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N \longrightarrow 1$$

La propriété d'avoir un groupe fondamental contenant un sous-groupe normal cyclique caractérise les espaces fibrés de Seifert dans la classe des variétés Haken (théorème VI.24, [Ja]). Il a été longtemps conjecturé — sous le nom de conjecture de Seifert — qu'il s'agirait en fait d'une caractérisation des espaces fibrés de Seifert, dans la classe entière des 3-variétés. Ce résultat aurait été récemment montré (mais non encore publié) par G.Mess.

Le groupe quotient  $\pi_1(M)/N$  fait partie d'une classe de groupes largement étudiée, la classe des groupes fuchsien, que nous examinerons plus en détail dans le paragraphe suivant.



**Remarque 2 :** Le groupe  $\pi_1(M)$  est soit  $\mathbb{Z}$ , ou  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ , soit fini ssi  $\pi_1(M)/N$  est fini. Avec le théorème 5.3.1,  $\pi_1(M)$  est fini, si  $M$  n'est pas homéomorphe à  $S^1 \times S^2$  ou  $\mathbb{P}_3 \# \mathbb{P}_3$ , et si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i)  $B = S^2$ , et soit  $q \leq 2$  soit  $q = 3$  et  $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$ . Dans le premier cas,  $M$  est un espace lenticulaire, dans le second cas les seuls tri-uplets  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  satisfaisant la condition  $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$ , sont  $(2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)$ , ou  $(2,2,\alpha_3)$  (variétés prismes).

(ii)  $B = \mathbb{P}_2$ , et  $q \leq 1$ . Ce sont les espaces lenticulaires  $L(4n, 2n - 1)$ , ou les variétés prismes.

Il est intéressant de remarquer qu'il s'agit d'une liste exhaustive des 3-variétés modelées sur la géométrie  $\mathbb{S}^3$  (cf. [Sc]).

**Remarque 3 :** Rappelons qu'il existe une application surjective de  $\pi_1(M)$  sur le premier groupe d'homologie à coefficients entiers de  $M$ ,  $H_1(M, \mathbb{Z})$ , appelée application de Hurewicz, dont le noyau est le sous-groupe commutateur de  $\pi_1(M)$ . Ainsi tout élément de  $\pi_1(M)$ , peut aussi se voir dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ . Si la base  $B$  est non orientable,  $h$  est d'ordre 2 en homologie. Si la base est orientable,  $h$  peut être d'ordre fini ou infini. Si  $B$  est à bord non vide, alors  $h$  est d'ordre infini dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ . Si  $B$  est fermée, alors  $h$  peut-être d'ordre fini ou infini dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$  (cf. [Or] §7.2, pour une formule caractérisant l'ordre de  $h$  dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$  dans ce dernier cas).

Le reste de cette section sera consacré à l'introduction du concept essentiel de **sous-groupe canonique** du groupe d'un Seifert. Pour cela, on commence par se placer dans le cas où la base  $B$  est non-orientable. On considère le groupe  $F$ , libre sur les générateurs  $a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h$ , et la surjection canonique  $\pi : F \longrightarrow \pi_1(M)$ .

Donné un mot  $\omega$  sur  $a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h$ , et leur inverse, on dit que  $\omega$  est A-pair, si le nombre d'occurrence dans  $\omega$ , d'éléments de la forme  $a_i^{\pm 1}$ , est pair, et A-impair sinon. Ainsi on parlera de A-parité de  $\omega$ . Clairement, si le mot  $\omega$  représente un élément  $u$  de  $F$ , tous les mots représentant  $u$  ont même A-parité. Ainsi on parlera aussi de A-parité d'un élément de  $F$ . De même, avec la présentation donnée par le théorème 5.2.1, puisque les relations de  $\pi_1(M)$  sont des mots A-pairs, si  $\pi(u) = \pi(v)$ , alors  $u$  et  $v$  ont même A-parité. Ainsi on peut définir la notion de **A-parité** pour un élément  $\alpha$  de  $\pi_1(M)$  ; si  $\alpha = \pi(\omega)$ ,  $\alpha$  est **A-pair** si  $\omega$  est A-pair, et **A-impair** si  $\omega$  est A-impair. L'ensemble des éléments A-pairs de  $\pi_1(M)$ , forme un sous-groupe de  $\pi_1(M)$ , que l'on note  $\Pi$ .

**Proposition 5.2.1** *Ainsi défini,  $\Pi$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(M)$ .*

**Démonstration** Si  $u \notin \Pi$ , alors  $a_1 u \in \Pi$ . Ainsi l'ensemble des cosets à droite  $\pi_1(M) \bmod \Pi$  est constitué de deux éléments,  $[1]$ , et  $[a_1^{-1}]$ , et donc  $\Pi$  est d'indice 2 dans  $\pi_1(M)$ . ■

Si  $M$  est un espace fibré de Seifert, muni d'une fibration ayant pour base  $B$ , on appelle **sous-groupe canonique** de  $\pi_1(M)$ , le sous-groupe défini comme étant  $\pi_1(M)$  si  $B$  est orientable, et  $\Pi$  sinon.

Notre définition est en fait une version combinatoire de la définition plus topologique de [JS]. Leur définition est la suivante. La surjection canonique  $p$  de  $M$  sur sa base, induit l'épimorphisme  $p_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(B)$ . Le sous-groupe d'orientation de  $\pi_1(B)$  (*i.e.* celui associé au revêtement d'orientation de  $B$ ), est un sous-groupe d'indice 1 ou 2 de  $\pi_1(B)$ , que l'on note  $\Omega$ . Alors  $p_*^{-1}(\Omega) = \Pi$ . Cela est facile à établir, dès que l'on a remarqué que lorsque  $B$  est non orientable, parmi les générateurs canoniques de  $\pi_1(B)$ , images par  $p_*$  des générateurs canoniques de  $\pi_1(M)$ , seuls ceux de la forme  $p_*(a_i)$  ont pour représentant un lacet de  $B$  qui renverse l'orientation de  $B$ .

**Remarque :** Les notions de fibres et de sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)$  dépendent d'une fibration de  $M$ , puisqu'elle dépendent d'une présentation donnée par le théorème 5.2.1. Ainsi, lorsque nous les emploierons, nous supposerons fixée une fibration de Seifert de  $M$ .

Le sous-groupe canonique peut aussi être caractérisé algébriquement, comme centralisateur d'un élément non trivial de la fibre  $N$ . C'est le résultat qu'énonce la proposition suivante.

**Proposition 5.2.2 (Centralisateur d'un élément de la fibre)** *Soient  $M$  un fibré de Seifert,  $N$  la fibre et  $\Pi$  le sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)$ . Si  $\pi_1(M)$  est infini, soit  $\alpha \in N$  un élément non trivial de la fibre, alors  $\Pi$  est le centralisateur de  $\alpha$  dans  $\pi_1(M)$ , et si  $\omega \notin \Pi$ , alors  $\omega\alpha\omega^{-1} = \alpha^{-1}$ .*

**Démonstration** Si la base  $B$  de  $M$  est orientable,  $\Pi = \pi_1(M)$ , et puisque la fibre est dans le centre de  $\pi_1(M)$ , et que  $\Pi = \pi_1(M)$ , le résultat est clair. On suppose donc que  $B$  est non orientable.

Soit un élément  $\alpha = h^p$  dans la fibre  $N$ . On veut démontrer que si  $u \in \pi_1(M)$ ,  $u\alpha u^{-1} = \alpha^\varepsilon$ , où  $\varepsilon = 1$  si  $u \in \Pi$ , et  $\varepsilon = -1$  sinon. On procède par induction sur la longueur d'un mot sur les générateurs, représentant  $u$ . Si  $u$  peut être représenté par un mot de longueur nulle, alors  $u = 1$ ,  $u \in \Pi$ , et  $u\alpha u^{-1} = \alpha$ . Si  $u$  peut être représenté par un mot de longueur  $n + 1$ ,  $u = \pi(u_1 \cdots u_{n+1}) = \pi(u_1)\pi(u_2 \cdots u_{n+1})$ . On note  $v_1 = \pi(u_1)$ , et  $v = \pi(u_2 \cdots u_{n+1})$ . Alors  $v_1$  est un générateur de  $\pi_1(M)$ , et  $v$  est représenté par le mot  $u_2 \cdots u_{n+1}$  de longueur  $n$ . En appliquant l'hypothèse d'induction,

$$\begin{aligned} u\alpha u^{-1} &= v_1 v \alpha v^{-1} v_1^{-1} \\ &= v_1 \alpha^\varepsilon v_1^{-1} \end{aligned}$$

où  $\varepsilon = 1$  si  $v \in \Pi$ , et  $\varepsilon = -1$  sinon. Si  $v_1$  n'est pas de la forme  $a_i^{\pm 1}$ , alors  $u$  et  $v$  ont même A-parité, et avec la présentation (2) donnée par le théorème 5.2.1,

$$u\alpha u^{-1} = v_1 \alpha^\varepsilon v_1^{-1} = v_1 h^{\varepsilon p} v_1^{-1} = h^{\varepsilon p} = \alpha^\varepsilon$$

Si  $v_1 = a_i^{\pm 1}$ , alors

$$u\alpha u^{-1} = v_1 h^{\varepsilon p} v_1^{-1} = h^{-\varepsilon p} = \alpha^{-\varepsilon}$$

de plus,  $v$  et  $u$  sont de A-parité différente, et donc  $u \in \Pi$  si et seulement si  $u \notin \Pi$ . Ceci conclut l'induction.

Ainsi,  $\Pi \subset Z(\alpha)$ . Si  $u \notin \Pi$ , avec ce qui précède,  $u\alpha u^{-1} = \alpha^{-1}$ , et donc  $u \in Z(\alpha)$  si et seulement si  $\alpha^2 = 1$ . Or, si  $\pi_1(M)$  est infini,  $h$  est d'ordre infini (remarque 1, théorème 5.2.1), et dans ce cas, si  $\alpha \neq 1$ ,  $u \notin Z(\alpha)$ , et donc  $Z(\alpha) \subset \Pi$ . ■

## 5.3 Groupes Fuchsien

Etant donnée une fibration de  $M$ , et  $N$  la fibre,  $N$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(M)$ , et on peut considérer le quotient  $\pi_1(M)/N$ . C'est un groupe qui fait partie d'une classe de groupes appelés groupes Fuchsien, bien connus des analystes complexes, des géomètres et des topologues, et largement étudiés. Aussi, pour une introduction aux groupes Fuchsien, adéquate à l'étude des espaces fibrés de Seifert, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [JS] et [He]. Nous rappellerons les résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Sous les hypothèses du théorème 5.2.1, on peut donner à  $\pi_1(M)/N$  la présentation (1) ou (2), selon si  $B$  est ou non orientable,

$$\langle \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_p \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \left( \prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_p = 1 \rangle$$

ou

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_p \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_p = 1 \rangle$$

et l'on note  $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$  la surjection canonique. Si  $u \in \pi_1(M)$ , on notera  $\underline{u}$  au lieu de  $\rho(u)$ .

Dans le cas où  $M$  a un bord non vide, la dernière relation peut être transformée en

$$\underline{d}_j^{-1} = \underline{d}_{j+1} \cdots \underline{d}_p \cdot \left( \prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \cdot \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{j-1}$$

ou

$$\underline{d}_j^{-1} = \underline{d}_{j+1} \cdots \underline{d}_p \cdot \left( \prod_{i=1}^g \underline{a}_i^2 \right) \cdot \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{j-1}$$

pour tout  $j = 1 \cdots n$ . Un changement de Tietze permet donc de supprimer cette relation et le générateur  $\underline{d}_j$ . Ceci montre que  $\pi_1(M)/N$  est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les générateurs  $\underline{a}_i$ ,  $\underline{b}_j$  (éventuellement),  $\underline{c}_k$ , et  $\underline{d}_l$ , à l'exception de l'un des  $\underline{d}_l$ .

Il est bien connu, qu'un produit libre de groupes cycliques contient un sous-groupe libre d'indice fini. En particulier, si  $\partial M \neq \emptyset$ , alors  $\pi_1(M)/N$  contient le groupe d'une surface à bord non vide, comme sous-groupe d'indice fini. C'est un fait remarquable, que ce résultat reste vrai dans le cas où  $M$  est à bord vide. C'est le théorème suivant, qui constitue le théorème 12.2 de [He].

**Théorème 5.3.1 (Sous-groupe de surface d'indice fini)** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert fermé. Si  $\pi_1(M)/N$  admet pour présentation :*

$$\langle \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \left( \prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q = 1 \rangle \quad (1)$$

ou

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q = 1 \rangle \quad (2)$$

alors,  $\pi_1(M)/N$  contient le groupe d'une surface fermée  $F$ , comme sous-groupe d'indice fini,  $\lambda$ . De plus la caractéristique d'Euler de  $F$ , est donnée par la formule suivante :

$$\chi(F) = \begin{cases} \lambda(2 - 2g - \sum_{i=1}^q (1 - \frac{1}{\alpha_i})) & \text{dans le cas (1)} \\ \lambda(2 - g - \sum_{i=1}^q (1 - \frac{1}{\alpha_i})) & \text{dans le cas (2)} \end{cases}$$

En particulier,  $\chi(F) > 0$  ssi,

Cas (1) :  $g = 0$ , et soit  $q \leq 2$  soit  $q = 3$  et  $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$ .

Cas (2) :  $g = 1$  et  $q = 0$  ; ou  $q = 1$  et  $\alpha_1 = 2$ .

et  $\chi(F) = 0$  seulement dans les cas suivants :

Cas (1) :  $g = 1$  et  $q = 0$  ; ou  $g = 0$ ,  $q = 3$ , d'indices  $(3,3,3), (2,4,4)$  ou  $(2,3,6)$  ; ou  $g = 0$ ,  $q = 4$ , d'indices  $(2,2,2,2)$ .

Cas (2) :  $g = 2$  et  $q = 0$  ; ou  $g = 1$ ,  $q = 2$ , d'indices  $(2,2)$ .

**Remarque 1 :** Si  $\chi(F) \leq 0$ , alors  $\pi_1(F)$  est infini. Ainsi, si  $M$  est fermée,  $\pi_1(M)/N$  est fini ssi  $\chi(F) > 0$ . Si  $\partial M \neq \emptyset$ , alors soit  $M$  est homéomorphe à un tore solide, soit  $\pi_1(M)/N$  est infini.

**Remarque 2 :** Si  $\partial M$  est non vide,  $\pi_1(M)/N$  est un produit libre de groupes cycliques, c'est en particulier un groupe Gromov-hyperbolique. Si  $\partial M = \emptyset$ , et si  $\chi(F) < 0$ ,  $\pi_1(M)/N$  contient le groupe d'une surface hyperbolique comme sous-groupe d'indice fini, et est donc Gromov-hyperbolique. Si  $\chi(F) > 0$ ,  $\pi_1(M)/N$  est un groupe fini. Si  $\chi(F) = 0$ ,  $\pi_1(M)/N$  contient  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  comme sous-groupe d'indice fini. Avec le théorème de Bieberbach (cf. [Ra]),  $\pi_1(M)/N$  est un groupe cristallographique, i.e. un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(E^2)$ . En particulier, c'est un groupe biautomatique (cf. [CEHLPT]). Ainsi, dans tous les cas, un groupe Fuchsien,  $\pi_1(M)/N$ , a un problème de la conjugaison résoluble.

Topologiquement, le groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ , est le groupe fondamental de l'espace topologique  $K$  que l'on obtient en retirant  $q$  disques disjoints sur la surface  $B$ , et en recollant sur les  $q$  composantes au bord de la surface obtenue, des disques, par des applications de degrés respectifs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ . Ainsi, dans un sens, un groupe Fuchsien est un « groupe de surface avec torsion ». Notons  $\overline{B}$  la surface obtenue en retirant  $q$  disques disjoints sur  $B$ . Clairement, si  $D$  est une composante de  $\partial \overline{B}$  le long duquel on a recollé un disque, alors un élément de  $\pi_1(D) \subset \pi_1(\overline{B})$  est de torsion dans  $\pi_1(M)/N$ . La proposition suivante, énonce que si  $\pi_1(M)/N$  est infini, les seuls éléments de torsion, sont à conjugaison près, ceux ainsi obtenus. C'est la proposition 6.2 de [LS], ou sous une forme plus réduite, la proposition II.3.6 de [JS].

**Proposition 5.3.1 (Torsion dans un groupe Fuchsien infini)** Soit  $\pi_1(M)/N$ , donné par une des présentations (1) ou (2) figurant plus haut. Si  $\pi_1(M)/N$  est infini, alors tout élément  $u$  non trivial, de torsion, est dans un conjugué d'un des sous-groupes  $\langle \underline{c}_j \rangle$ , pour  $j = 1, \dots, q$ . De plus il s'écrit de façon unique sous la forme  $u = v \underline{c}_j^n v^{-1}$ , avec  $0 < n < \alpha_j$ , i.e., si il s'écrit aussi  $u = w \underline{c}_k^m w^{-1}$ , avec  $0 < m < \alpha_k$ , alors  $j = k$ ,  $n = m$ , et  $w = v \underline{c}_j^t$ , pour  $t \in \mathbb{Z}$ .

Si la surface  $B$  est non orientable, alors clairement la surface  $\overline{B}$  sera aussi non orientable. Considérons le revêtement d'orientation de  $\overline{B}$ . Puisque tout lacet de  $\partial\overline{B}$  préserve l'orientation, ce revêtement s'étend à un revêtement à deux feuillets  $\tilde{K}$  de  $K$ . Le groupe  $\pi_1(\tilde{K})$  s'injecte dans  $\pi_1(K) = \pi_1(M)/N$ , nous noterons  $\Theta$  son image. C'est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(M)/N$ .

Ce sous-groupe  $\Theta$  peut aussi se définir combinatoirement. Supposons encore que la base  $B$  de  $M$  soit non orientable, et considérons la présentation (2) de  $\pi_1(M)/N$  donnée ci-dessus. Un élément  $g$  de  $\pi_1(M)/N$  sera dit A-pair, si un mot le représentant contient un nombre pair d'occurrences de lettres  $\underline{a}_1, \underline{a}_1^{-1}, \dots, \underline{a}_g, \underline{a}_g^{-1}$ . Puisque les relateurs de  $\pi_1(M)/N$  contiennent un nombre pair d'occurrences de telles lettres, cette notion est bien définie. On peut aussi voir cela, en remarquant qu'un élément A-pair est l'image par  $\rho$  d'un élément  $A$ -pair de  $\pi_1(M)$ , et que le noyau de  $\rho$ ,  $N$ , est constitué d'éléments  $A$ -pairs. Notons  $\underline{\Pi}$  le sous-ensemble de  $\pi_1(M)/N$  constitué des éléments A-pairs. Il est facile de vérifier que  $\underline{\Pi}$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(M)/N$ . En fait,  $\underline{\Pi} = \Theta$ . Pour voir cela, il suffit de remarquer que parmi les générateurs de  $\pi_1(M)/N$  (donnés par la présentation (2) figurant plus haut), seuls les  $\underline{a}_i$  ont pour représentants des lacets qui renversent l'orientation de  $K$ . Si  $B$  est orientable, on pose  $\underline{\Pi} = \pi_1(M)/N$ . Dans tous les cas,  $\Pi = \rho^{-1}(\underline{\Pi})$ .

Nous disposons maintenant du vocabulaire nécessaire pour énoncer le résultat caractérisant le centralisateur d'un élément dans un groupe Fuchsien infini.

**Proposition 5.3.2 (Centralisateurs dans un groupe Fuchsien infini)**

*Soient  $\pi_1(M)/N$  un groupe Fuchsien infini, et  $u \in \pi_1(M)/N$ . Si  $u$  est d'ordre infini, alors son centralisateur  $\mathcal{Z}(u)$  est soit isomorphe au groupe de la bouteille de Klein, soit libre abélien de rang 1 ou 2. Si de plus  $u \notin \underline{\Pi}$ , alors  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini.*

*Si  $u$  est d'ordre fini, alors son centralisateur est cyclique fini. Plus précisément (cf. proposition 5.3.1), pour  $i = 1, \dots, q$ , et  $0 < n < \alpha_i$ ,  $\mathcal{Z}(\underline{c}_i^n) = \langle \underline{c}_i \rangle$ .*

**Remarque :** Si  $\pi_1(M)/N$  est fini, le centralisateur d'un élément n'est pas nécessairement cyclique. Ainsi par exemple si  $B = S^2$ ,  $q = 3$  d'indices  $(2,2,2)$ ,  $\pi_1(M)/N$  admet la présentation :

$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

Alors  $xyxy = 1$  implique  $xyx = y^{-1}$ , et donc  $xyx^{-1} = y$ , et  $\pi_1(M)/N$  est abélien. Le centralisateur de  $x$  est le groupe  $\pi_1(M)/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Cet exemple peut aisément se généraliser aux cas des groupes diédraux  $B = S^2$ ,  $q = 3$ , d'indices  $(2,2,2n)$ .

**Démonstration** Notons  $\underline{\Pi}$  le sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)/N$ . Considérons le centralisateur  $\mathcal{Z}(u)$  d'un élément  $u$  de  $\pi_1(M)/N$ .

Si  $u$  est d'ordre infini, puisque  $u \in \mathcal{Z}(u)$ ,  $\mathcal{Z}(u)$  est un groupe infini. De plus son centre est non trivial, puisqu'il contient  $u$ .

Maintenant, d'une part tout sous-groupe d'un groupe Fuchsien est un groupe Fuchsien (cf. §3 de [JS]), et ainsi  $\mathcal{Z}(u)$  est un groupe Fuchsien. d'autre part, un groupe Fuchsien infini  $G$ , ayant un centre non trivial  $C$  est soit le groupe de la

bouteille de Klein, soit libre abélien de rang 1 ou 2. Si le centre  $C$  n'est pas dans le sous-groupe canonique de  $G$ , alors  $G$  est cyclique infini (cf. proposition II.3.11, [JS]). Le sous-groupe canonique de  $\mathcal{Z}(u)$  est  $\mathcal{Z}(u) \cap \underline{\Pi}$ , et ainsi si  $u \notin \underline{\Pi}$ , alors  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini. Ceci démontre la première partie de la proposition.

Si  $u$  est d'ordre fini, alors  $\mathcal{Z}(u)$  ne peut pas contenir d'élément d'ordre infini. En effet, dans le cas contraire  $\mathcal{Z}(u)$  contiendrait le sous-groupe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ , qui n'est pas un groupe Fuchsien (lemme II.3.10 [JS]), ce qui est contradictoire. Avec la proposition 5.3.1, si  $u$  est d'ordre fini,  $u$  est conjugué à  $\underline{c}_i^n$ , pour  $1 \leq i \leq q$  et  $n \in \mathbb{Z}_*$ , et nous pouvons donc supposer que  $u = \underline{u}_i^n$ . Si nous considérons un élément non trivial  $v \in \mathcal{Z}(u)$ , il est de torsion, et donc avec la proposition 5.3.1,

$$v = a\underline{c}_j^m a^{-1}$$

et puisque  $u$  et  $v$  commutent,

$$u = \underline{c}_i^n = a\underline{c}_j^m a^{-1} \underline{c}_i^n a\underline{c}_j^{-m} a^{-1}$$

et donc, avec la proposition 5.3.1, il existe  $k \neq 0$ ,

$$v = a\underline{c}_j^m a^{-1} = \underline{c}_i^k$$

et donc  $v \in \langle \underline{c}_i \rangle$ . Ainsi, pour  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{Z}(\underline{c}_i^n) = \langle \underline{c}_i \rangle$ . ■

## 5.4 Certaines propriétés algébriques

Nous commençons par achever la caractérisation du centralisateur d'un élément dans un groupe de Seifert infini  $\pi_1(M)$  (avec la proposition 5.2.2, nous avons déjà caractérisé le centralisateur d'un élément de la fibre). Nous aurons besoin pour cela, du lemme algébrique qui suit.

**Lemme 5.4.1** *Soit  $G$  un groupe, et  $N$  un sous-groupe cyclique infini du centre de  $G$ . Si  $G/N$  est libre abélien de rang 2, alors soit  $G$  est abélien, soit  $N$  est le centre de  $G$ .*

**Démonstration** Notons  $h$  un générateur de  $N$ , et considérons deux éléments  $a, b \in G$ , tels que  $a.N$  et  $b.N$  forment une base de  $G/N$ . En particulier,  $a, b$ , et  $h$  engendrent  $G$ . Puisque  $G/N$  est abélien, on a la relation  $aba^{-1}b^{-1} = h^n$  dans  $G$ , pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $n = 0$ , alors  $a$  et  $b$  commutent, et puisque  $h$  commute avec  $a$  et  $b$ ,  $G$  est abélien. Aussi nous pouvons supposer que  $n \neq 0$ , et montrer qu'alors,  $N$  est le centre de  $G$ .

Avec la relation  $aba^{-1}b^{-1} = h^n$ , et le fait que  $h$  soit dans le centre de  $G$ , tout élément de  $G$  peut s'écrire sous la forme  $a^p b^q h^r$ , avec  $p, q, r \in \mathbb{Z}$ . Considérons donc un élément de  $G$ ,  $g = a^p b^q h^r$ , et supposons que  $g$  soit dans le centre de  $G$ . Alors  $a^p b^q$  est aussi dans le centre de  $G$ , ce qui implique que  $a^p$  commute avec  $b$  et  $b^q$  commute avec  $a$ . On a la relation  $aba^{-1} = bh^n$ , et donc  $b = a^p b a^{-p} = b h^{np}$ . Ainsi, puisque  $h$  est d'ordre infini, et  $n \neq 0$ , alors  $p = 0$ . De la même façon,  $ba^{-1}b^{-1} = a^{-1}h^n$ , et donc  $a^{-1} = b^q a^{-1} b^{-q} = a^{-1} h^{nq}$ , et nécessairement  $q = 0$ . Ainsi  $g = h^r \in N$ , et donc  $N$  est le centre de  $G$ . ■

### Proposition 5.4.1 (Centralisateurs dans un groupe de Seifert infini)

*Soient  $M$  un fibré de Seifert, dont le groupe  $\pi_1(M)$  est infini, et  $N$  la fibre de  $\pi_1(M)$ , pour une certaine fibration de  $M$ . Soit  $u$  un élément de  $\pi_1(M)$ , qui n'est pas dans la fibre  $N$ . Alors le centralisateur de  $u$ ,  $\mathcal{Z}(u)$  contient un groupe abélien comme sous-groupe d'indice 1 ou 2. Plus précisément,  $\mathcal{Z}(u) \cap \Pi$  est abélien. De plus, si  $u \notin \Pi$ , alors son centralisateur est cyclique infini.*

**Démonstration** Considérons  $u \in \pi_1(M) - N$ , et notons  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(u)$  son centralisateur dans  $\pi_1(M)$ . Notons  $\underline{u} = \rho(u)$ , et  $\underline{\mathcal{Z}} = \rho(\mathcal{Z})$ , où  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)/N$ . Puisque  $u \notin N = \ker \rho$ ,  $\underline{u}$  est non trivial dans  $\pi_1(M)/N$ .

Si  $u \notin \Pi$ , alors  $\underline{u} \notin \underline{\Pi}$ . Avec la proposition 5.3.1, nécessairement  $\underline{u}$  est d'ordre infini. De plus, avec la proposition 5.2.2,  $N \cap \mathcal{Z} = \{1\}$ . Ainsi, la restriction de  $\rho$  à  $\mathcal{Z}$  est un isomorphisme sur  $\underline{\mathcal{Z}}$ . Or  $\underline{\mathcal{Z}}$  est un sous-groupe non trivial (puisque  $\underline{u} \in \underline{\mathcal{Z}}$ ) du centralisateur  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  de  $\underline{u}$  dans  $\pi_1(M)/N$ . Avec la proposition 5.3.2,  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  est cyclique infini. Ainsi,  $\underline{\mathcal{Z}}$  est cyclique infini, et donc  $\mathcal{Z}$  aussi.

Considérons maintenant le cas où  $u \in \Pi$ , alors  $\underline{u} \in \underline{\Pi}$ . Supposons d'abord que  $\underline{u}$  soit de torsion. Dans ce cas, avec la proposition 5.3.1,  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  est un sous-groupe cyclique fini de  $\underline{\Pi}$ . Si  $a \in \mathcal{Z}(u) - \Pi$ , alors  $\underline{a} \in \mathcal{Z}(\underline{u}) - \underline{\Pi}$ . Ainsi, en particulier,  $\mathcal{Z}(u) \subset \Pi$ , et donc, avec la proposition 5.2.2,  $N$  est dans le centre de  $\mathcal{Z}(u)$ . De plus, on a  $\mathcal{Z}(u)/N \cong \underline{\mathcal{Z}}$ . Or  $\underline{\mathcal{Z}}$  est un sous-groupe non trivial de  $\mathcal{Z}(\underline{u})$ , et est donc cyclique (fini). Ainsi, Puisque  $N$  est central dans  $\mathcal{Z}(u)$ , clairement,  $\mathcal{Z}(u)$  est abélien.



Supposons maintenant, que  $\underline{u}$  soit d'ordre infini. Alors, puisque  $\underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$  contient  $\underline{u}$ , dans son centre, c'est un groupe Fuchsien infini, ayant un centre non trivial. Avec la proposition II.3.11 de [JS],  $\underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$  est isomorphe au groupe de la bouteille de Klein, ou à un groupe libre abélien de rang 1 ou 2. Or, avec la proposition II.3.7 de [JS], le sous-groupe d'orientation  $\underline{\Pi}$  d'un groupe Fuchsien ne peut pas contenir le groupe de la bouteille de Klein comme sous-groupe. Ainsi,  $\underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$  est un groupe libre abélien de rang 1 ou 2.

Nous souhaitons montrer que  $\mathcal{Z} \cap \Pi$  est abélien. Puisque  $u \in \underline{\Pi}$ ,  $N$  est dans le centre de  $\mathcal{Z} \cap \Pi$ , et de plus,  $(\mathcal{Z} \cap \Pi)/N \cong \underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$ . Si  $\underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$  est cyclique, il est facile de vérifier, puisque  $N$  est central, que  $\mathcal{Z} \cap \Pi$  est abélien. Si  $\underline{\mathcal{Z}} \cap \underline{\Pi}$  est libre abélien de rang 2, alors avec le lemme 5.4.1, soit  $\mathcal{Z} \cap \Pi$  est abélien, soit  $N$  est le centre de  $\mathcal{Z} \cap \Pi$ . Or  $u$  est dans le centre de  $\mathcal{Z} \cap \Pi$ , et n'est pas dans  $N$ . Ainsi, on a la conclusion souhaitée. ■

Nous caractérisons maintenant les éléments périphéraux conjugués dans un espace fibré de Seifert à bord non vide. Ce résultat est essentiel dans notre étude. Combiné aux propositions 2.1.2 et 4.3.1, il nous permettra de montrer que le graphe de groupe associé à la décomposition minimale d'une variété Haken, vérifie une propriété intéressante (être presque sans cycle ; cf. chap. 6), ce qui simplifie grandement son groupe fondamental.

Topologiquement, le résultat suivant affirme que dans un fibré de Seifert  $M$  à bord non vide, à l'exception des cas  $M \cong S^1 \times D^2$  et  $M \cong S^1 \times S^1 \times I$ , un anneau essentiel est saturé en fibres régulière, dans toute fibration de Seifert de  $M$ .

**Proposition 5.4.2 (Anneaux essentiels dans un Seifert)** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert, à bord non vide, qui n'est pas  $S^1 \times D^2$  ou  $S^1 \times S^1 \times I$ . Avec les notations du théorème 5.2.1, nous notons  $T_i = \langle d_i, h \rangle$  et  $T_j = \langle d_j, h \rangle$ , avec  $1 \leq i, j \leq p$  (éventuellement  $i = j$ ). Soient  $a \in T_i$  et  $b \in T_j$ , et  $u$  qui conjugue  $a$  en  $b$  dans  $\pi_1(M)$ .*

*Alors soit  $i = j$ ,  $a = b$ , et  $u \in T_i$ , soit  $a = h^n$  et  $b = h^{\epsilon n}$ , où  $\epsilon = \pm 1$ . De plus,  $\epsilon = 1$  si et seulement si  $u$  est dans le sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)$ .*

**Démonstration** Conservons les notations du paragraphe 5.3. Considérons une fibration de  $M$ , notons  $B$  sa base, et  $N$  la fibre. Puisque  $M$  est à bord non vide (notons  $p$  le nombre de composantes de  $\partial M$ ),  $\pi_1(M)/N$  est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les générateurs de  $\pi_1(M)/N$ , à l'exception de l'un d'entre eux,  $\underline{d}_p$ .

$$\pi_1(M)/N = F * \langle \underline{c}_1 \rangle * \cdots * \langle \underline{c}_q \rangle * \langle \underline{d}_1 \rangle * \cdots * \langle \underline{d}_{p-1} \rangle$$

où  $F$  est le groupe libre engendré par  $\underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g$ , ou par  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g$ , selon si  $B$  est ou non orientable. L'image de  $d_p$  par  $\rho$ , est donnée par la formule :

$$\rho(d_p) = \underline{d}_p = \left( \left( \prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{p-1} \right)^{-1}$$

$$\rho(d_p) = \underline{d}_p = (\underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{p-1})^{-1}$$

selon si  $B$  est ou non orientable.

Puisque  $M$  n'est pas homéomorphe à un tore solide, toutes les composantes de  $\partial M$  sont incompressibles. Avec le théorème 5.2.1, à conjugaison près, les plongements des groupes du bord dans  $\pi_1(M)$  peuvent être pris comme étant  $T_i = \langle d_i, h \rangle$  pour  $i$  variant de 1 à  $p$ . Ainsi,  $\rho(T_i)$  est engendré par  $\underline{d}_i$ .

Si la fibration de  $M$  a pour base un disque ou un anneau, et aucune fibre exceptionnelle, alors on a la relation  $\underline{d}_1 = 1$ , ou  $\underline{d}_2 = \underline{d}_1^{-1}$ . Dans ce cas,  $M$  est fibré en cercles sur le disque, ou l'anneau. Puisque  $M$  est orientable, nécessairement  $M$  est homéomorphe à  $S^1 \times D^2$  ou  $S^1 \times S^1 \times I$ . Dans le cas contraire, les images des  $T_i$  par  $\rho$  sont non triviales, et  $\rho(T_i) \cap \rho(T_j) = \{1\}$ , si  $i \neq j$ . De plus, les classes de conjugaison de deux éléments non triviaux  $v \in \rho(T_i)$ ,  $w \in \rho(T_j)$ , avec  $i \neq j$ , sont disjointes, et il en est de même pour deux éléments distincts de  $\rho(T_i)$ . Si  $u$  conjugue  $a$  en  $b$  dans  $\pi_1(M)$ , alors  $\underline{u}$  conjugue  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  dans  $\pi_1(M)/N$ , et donc, soit  $i = j$ ,  $\underline{a} = \underline{b} = \underline{d}_i^t$ , et  $\underline{u} = \underline{d}_i^r$ , pour  $t, r \in \mathbb{Z}$ , soit  $\underline{a} = \underline{b} = 1$ .

Dans le premier cas, puisque  $\ker \rho = N \subset T_i$ ,  $u \in T_i$ , et  $a = bh^n$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Mais  $T_i$  est abélien, et donc  $u$  commute avec  $a, b$ , et  $h$ , ainsi,

$$b = uau^{-1} = ubh^nu^{-1} = bh^n$$

et donc  $h^n = 1$ . Or puisque  $M$  est à bord non vide,  $\pi_1(M)$  est infini, et donc  $h$  est d'ordre infini (cf. remarque 1, théorème 5.2.1). Donc  $n = 0$ , et  $a = b$ .

Dans le second cas,  $a = h^n$ , et  $b = h^m$ . Puisque  $\pi_1(M)$  est infini, on peut appliquer la proposition 5.2.2, et alors,

$$b = h^m = uh^nu^{-1} = h^{\epsilon n}$$

où  $\epsilon = \pm 1$  et  $\epsilon = 1$  si et seulement si  $u$  est dans le sous-groupe canonique. De plus, puisque  $h$  est d'ordre infini,  $m = \epsilon n$ . ■

On obtient immédiatement le corollaire,

**Corollaire 5.4.1** *Sous ces hypothèses, dans  $\pi_1(M)$ , le centralisateur d'un élément de  $T_i - N$  est  $T_i$ . De plus  $T_i$  est son propre normalisateur.*

## 5.5 Solution au problème de la conjugaison

Le but de cette section sera d'établir le résultat suivant :

**Théorème 5.5.1** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert. Son groupe  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble.*

Le problème du mot dans un fibré de Seifert, se résout dans la plupart des cas par la théorie des groupes automatiques. Plus précisément, D.Epstein et W.Thurston ont montré que le groupe d'un fibré de Seifert  $M$  a une structure automatique, à l'exception du cas où  $M$  est fermé et modelé sur la géométrie Nil. Dans ce dernier cas,  $\pi_1(M)$  est virtuellement nilpotent (cf. [Sc]), et admet donc une solution au problème du mot (cf. [Mi2]).

**Théorème 5.5.2** *Le groupe d'un fibré de Seifert, a un problème du mot résoluble.*

Un groupe fini admet une solution au problème de la conjugaison, aussi nous pourrions supposer que  $M$  est un espace fibré de Seifert ayant un groupe  $\pi_1(M)$  infini. Le résultat suivant va nous permettre de résoudre le problème de conjugaison.

**Proposition 5.5.1 (Problème de la conjugaison)** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert tel que  $\pi_1(M)$  soit infini, muni d'une fibration. Soient  $N$  la fibre dans  $\pi_1(M)$ , et  $\Pi$  le sous-groupe canonique. Notons  $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$ , et conservons les notations des sections précédentes. Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $\pi_1(M)$ , qui ne sont pas dans la fibre  $N$ , et supposons qu'il existe  $\underline{a} \in \pi_1(M)/N$  qui conjugue  $\underline{u}$  en  $\underline{v}$ ,*

$$\underline{a} \underline{u} \underline{a}^{-1} = \underline{v} \quad \text{dans } \pi_1(M)/N$$

*Alors, dans  $\pi_1(M)$  considérons un élément arbitraire  $a \in \rho^{-1}(\underline{a})$ . On a la relation (où  $n$  dépend de  $a$ ) :*

$$a u a^{-1} = v h^n \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

*Notons  $\mathcal{Z}(\underline{v})$ , le centralisateur de  $\underline{v}$  dans  $\pi_1(M)/N$ . Avec la proposition 5.3.2,  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  est cyclique ou isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ou au groupe de la bouteille de Klein, et admet donc au plus deux générateurs.*

*Si  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  est cyclique fini, (c'est le cas où  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont d'ordre fini), alors  $u \sim v$  ssi  $n = 0$ .*

*Si  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  est cyclique infini, engendré par  $\underline{x}$ , considérons un élément arbitraire  $x \in \rho^{-1}(\underline{x})$ . Alors, dans  $\pi_1(M)$ ,*

$$x v x^{-1} = v h^m$$

*Sous ces conditions,  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , ssi, une des conditions (symbolisées par le tableau suivant), est vérifiée :*

	$x \in \Pi$	$x \notin \Pi$
$v \in \Pi$	$m \text{ divise } n$	$n = 0 \text{ ou } m = n$
$v \notin \Pi$	$n(n+m) \text{ est pair}$	

Si  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  n'est pas cyclique, il admet deux générateurs  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ . Si  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  est isomorphe au groupe de la bouteille de Klein, on prend  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  comme les générateurs canoniques, i.e. ceux vérifiant la relation  $\underline{x}_2 \underline{x}_1 \underline{x}_2^{-1} = \underline{x}_1^{-1}$ . Considérons arbitrairement  $x_1 \in \rho^{-1}(\underline{x}_1)$  et  $x_2 \in \rho^{-1}(\underline{x}_2)$ . Avec le choix des générateurs de  $\mathcal{Z}(\underline{u})$ , nécessairement  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  ne sont pas tous deux  $\underline{A}$ -impairs, et donc  $x_1, x_2$  ne sont pas tous deux hors de  $\Pi$ .

Alors, dans  $\pi_1(M)$ , on a les relations

$$x_1 u x_1^{-1} = u h^{m_1}$$

$$x_2 u x_2^{-1} = u h^{m_2}$$

Sous ces conditions,  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , ssi une des conditions suivantes est vérifiée :

	$x_1, x_2 \in \Pi$	$x_1 \in \Pi, x_2 \notin \Pi$
$v \in \Pi$	$\text{ppcm}(m_1, m_2)/n$	$m_1/n$ ou $m_1/(n - m_2)$
$v \notin \Pi$	$n(n + m_1)(n + m_2)$ est pair	

**Démonstration** Supposons donc qu'il existe un élément  $\underline{a} \in \pi_1(M)/N$  qui conjugue  $\underline{u}$  en  $\underline{v}$ . Remarquons, que sous cette condition,  $u \in \Pi$  ssi  $v \in \Pi$ . Si  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  dénote le centralisateur de  $\underline{v}$  dans  $\pi_1(M)/N$ , l'ensemble des éléments de  $\pi_1(M)/N$  qui conjuguent  $\underline{u}$  en  $\underline{v}$ , est non vide, égal à  $\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a}$ .

$$\{g \in \pi_1(M)/N \mid \underline{v} = g \underline{u} g^{-1}\} = \mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a}$$

Si un élément  $b \in \pi_1(M)$ , conjugue  $v$  en  $u$  dans  $\pi_1(M)$ , alors  $\underline{b}$  conjugue  $\underline{v}$  en  $\underline{u}$  dans  $\pi_1(M)/N$ . Ainsi, nécessairement,  $b \in \rho^{-1}(\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a})$ . Nous allons vérifier sous quelles conditions (arithmétiques) portant sur  $n, m, m_1, m_2$ , et la  $A$ -parité de  $u, x, x_1, x_2$ , un élément de  $\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a}$  conjugue  $u$  en  $v$ . Rappelons que  $\ker \rho = N = \langle h \rangle$ , que  $h$  est d'ordre infini, puisque  $\pi_1(M)$  est infini, que  $h$  a pour centralisateur  $\Pi$ , et que les éléments de  $\pi_1(M) - \Pi$  «anticommutent» avec  $h$ .

Dans le cas où  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  est cyclique fini, nécessairement, puisque  $\underline{v} \in \mathcal{Z}(\underline{v})$ ,  $\underline{v}$  est d'ordre fini. Puisque  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont conjugués, leurs centralisateurs sont isomorphes, et donc  $\underline{u}$  est aussi d'ordre fini. Avec la proposition 5.3.1,  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont tous deux conjugués à un unique élément de la forme  $\underline{c}_i^p$ , avec  $0 < p \leq \alpha_i$ , pour la présentation canonique de  $\pi_1(M)/N$  donnée dans la section 5.3. Sans perte de généralité, nous pourrions supposer que  $\underline{v} = \underline{c}_i^p$ . En effet, si  $\underline{v}$  est conjugué à  $\underline{c}_i^p$  dans  $\pi_1(M)/N$ , alors il existe un automorphisme intérieur de  $\pi_1(M)$  qui envoie  $v$  sur  $c_i^p h^q$  pour un certain  $q \in \mathbb{Z}$ , et la relation  $aua^{-1} = v h^n$  est changée en  $aua^{-1} = v h^{\pm n}$ .

Avec la proposition 5.3.2,  $\mathcal{Z}(\underline{v}) = \langle \underline{c}_i \rangle$ . Ainsi,  $\rho^{-1}(\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a}) = N. \langle c_i \rangle .a$ . Or  $N$  et  $\langle c_i \rangle$  sont inclus dans le centralisateur de  $aua^{-1} = v h^n = c_i^p h^{n+q}$ , et donc si  $b \in \rho^{-1}(\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a})$ ,

$$b.u.b^{-1} = a.u.a^{-1} = v h^n$$

Ainsi,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$  ssi  $n = 0$ .

Dans la cas où  $\mathcal{Z}(\underline{v})$ , est cyclique infini, engendré par  $\underline{x}$ , on considère  $x \in \rho^{-1}(\underline{x})$ ; on vérifie alors pour un certain entier  $m$ ,

$$xvx^{-1} = vh^m$$

Observons que tout élément de  $\rho^{-1}(\mathcal{Z}(\underline{v}).\underline{a})$  s'écrit de façon unique sous la forme  $h^q.x^p.\underline{a}$ , où  $p, q \in \mathbb{Z}$  si  $x$  est sans torsion.

Si  $x \in \Pi$  et  $p \in \mathbb{N}$ , alors

$$\begin{aligned} x^p vx^{-p} &= x^{p-1}vh^mx^{1-p} \\ &= x^{p-1}vx^{1-p}h^m \\ &= \vdots \\ &= vh^{pm} \end{aligned}$$

En conjuguant par  $x^{-p}$ , on vérifie que l'identité reste vraie si  $p \in \mathbb{Z}$ . ainsi, pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} x^p aua^{-1}x^{-p} &= x^p vh^n x^{-p} \\ &= x^{p-1}vx^{1-p}h^n \\ &= vh^{n+pm} \end{aligned}$$

Si  $v \in \Pi$ , alors,

$$h^q x^p aua^{-1}x^{-p}h^{-q} = vh^{n+pm}$$

Donc, si  $x \in \Pi$  et  $v \in \Pi$ ,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$ , ssi  $\exists p \in \mathbb{Z}, n + pm = 0$  ssi  $m/n$ .

Si  $v \notin \Pi$ , alors

$$h^q x^p aua^{-1}x^{-p}h^{-q} = vh^{n+pm-2q}$$

Donc, dans ce cas,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$  ssi il existe des entiers  $p, q$  tels que  $n + pm - 2q = 0$ , ssi  $\exists p \in \mathbb{Z}, n + pm$  est pair. Regardons de plus près cette assertion. Si  $n$  est pair, alors  $\exists p = 0, n + pm$  est pair. Si  $n$  est impair, l'assertion devient  $\exists p \in \mathbb{Z}, pm$  est impair, ce qui est équivalent à la condition  $m$  impair. Ainsi,  $u \sim v$  ssi  $n$  pair ou  $n + m$  pair, ce qui est équivalent à la condition  $n(n + m)$  est pair.

Si  $x \notin \Pi$ , alors

$$\begin{aligned} x^2 vx^{-2} &= xvh^mx^{-1} \\ &= xvx^{-1}h^{-m} \\ &= vh^mh^{-m} \\ &= v \end{aligned}$$

de même,  $x^{-2}vx^2 = v$ , et donc si  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$x^p vx^{-p} = \begin{cases} v & \text{si } p \text{ est pair} \\ vh^m & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

on obtient, en remarquant que  $x^p \in \Pi$  ssi  $p$  est pair,

$$x^p a u (x^p a)^{-1} = \begin{cases} v h^n & \text{si } p \text{ est pair} \\ v h^{m-n} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Si  $v \in \Pi$ , alors

$$h^q x^p a u (h^q x^p a)^{-1} = \begin{cases} v h^n & \text{si } p \text{ est pair} \\ v h^{m-n} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi, si  $x \notin \Pi$ , et  $v \in \Pi$ ,  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , ssi  $n = 0$  ou  $m = n$ .

Si  $v \notin \Pi$ , alors

$$h^q x^p a u (h^q x^p a)^{-1} = \begin{cases} v h^{n-2q} & \text{si } p \text{ est pair} \\ v h^{m-n-2q} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

et dans ce cas,  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , ssi  $n$  est pair ou  $m - n$  est pair, ce qui est équivalent à la condition  $n(m + n)$  pair. Ceci achève le cas où  $\mathcal{Z}(\underline{v})$  est cyclique.

Considérons maintenant le cas où  $\mathcal{Z}(u)$  n'est pas cyclique. Alors, il est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ou au groupe de la bouteille de Klein. Avec le choix que nous avons fait de  $\underline{x}_1$  et  $\underline{x}_2$ , dans le cas où  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  est le groupe de la bouteille de Klein, il est clair, que tout élément de  $\mathcal{Z}(\underline{u})$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\underline{x}_1^{p_1} \underline{x}_2^{p_2}$ , avec  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ . Alors, tout élément de  $\rho^{-1}(\mathcal{Z}(\underline{v})\underline{a})$  s'écrit de façon unique sous la forme  $h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} \underline{a}$ , avec  $q, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ .

Si  $x_1, x_2 \in \Pi$ .

$$\begin{aligned} x_1^{p_1} x_2^{p_2} . v . (x_1^{p_1} x_2^{p_2})^{-1} &= x_1^{p_1} v h^{p_2 m_2} x_1^{-p_1} \\ &= x_1^{p_1} v x_1^{-p_1} h^{p_2 m_2} \\ &= v h^{p_1 m_1} h^{p_2 m_2} \\ &= v h^{p_1 m_1 + p_2 m_2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} &= x_1^{p_1} x_2^{p_2} v h^n (x_1^{p_1} x_2^{p_2})^{-1} \\ &= x_1^{p_1} x_2^{p_2} v (x_1^{p_1} x_2^{p_2})^{-1} h^n \\ &= v h^{n + p_1 m_1 + p_2 m_2} \end{aligned}$$

Si  $v \in \Pi$ ,

$$h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} = v h^{n + p_1 m_1 + p_2 m_2}$$

Et donc, dans ce cas,  $u \sim v$  ssi  $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $-n = p_1 m_1 + p_2 m_2$ . Or  $\{p_1 m_1 + p_2 m_2 \mid p_1, p_2 \in \mathbb{Z}\}$  est le sous-groupe cyclique de  $\mathbb{Z}$ , engendré par  $\text{ppcm}(m_1, m_2)$ . Ainsi,  $u \sim v$  ssi  $\text{ppcm}(m_1, m_2) \mid n$ .

Si  $v \notin \Pi$ .

$$h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} = v h^{n + p_1 m_1 + p_2 m_2 - 2q}$$

et alors,  $u \sim v$  ssi  $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $n + p_1 m_1 + p_2 m_2$  est pair. Regardons de plus près cette dernière condition. Si  $n$  est pair elle est vérifiée. Si  $n$  est impair, elle est équivalente à la condition  $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $p_1 m_1 + p_2 m_2$  impair. Or  $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $p_1 m_1 + p_2 m_2$  impair ssi  $\text{ppcm}(m_1, m_2)$  est impair, ssi  $m_1$  ou  $m_2$  est impair. Ainsi la condition  $\exists p_1, p_2$ , tels que  $n + p_1 m_1 + p_2 m_2$  est pair est équivalente à la condition  $n(n + m_1)(n + m_2)$  pair. Ainsi,  $u \sim v$  ssi  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair.

Si  $x_1 \in \Pi, x_2 \notin \Pi$ . Alors pour  $p_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$x_2^{p_2} v x_2^{-p_2} = \begin{cases} v & \text{si } p_2 \text{ est pair} \\ v h^{m_2} & \text{si } p_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

En remarquant que  $x_2^{p_2} \in \Pi$  ssi  $p_2$  est pair,

$$x_2^{p_2} a . u . (x_2^{p_2} a)^{-1} = \begin{cases} v h^n & \text{si } p_2 \text{ est pair} \\ v h^{m_2 - n} & \text{si } p_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc,

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} = \begin{cases} v h^{n + p_1 m_1} & \text{si } p_2 \text{ est pair} \\ v h^{m_2 - n + p_1 m_1} & \text{si } p_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

Si  $v \in \Pi$ ,

$$h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} = \begin{cases} v h^{n + p_1 m_1} & \text{si } p_2 \text{ est pair} \\ v h^{m_2 - n + p_1 m_1} & \text{si } p_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc, dans ce cas,  $u \sim v$  ssi  $m_1/n$  ou  $m_1/(n - m_2)$ .

Si  $v \notin \Pi$ ,

$$h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a . u . (h^q x_1^{p_1} x_2^{p_2} a)^{-1} = \begin{cases} v h^{n + p_1 m_1 - 2q} & \text{si } p_2 \text{ est pair} \\ v h^{m_2 - n + p_1 m_1 - 2q} & \text{si } p_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans ce cas,  $u \sim v$  ssi  $\exists p_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $n + p_1 m_1$  est pair ou  $m_2 - n + p_1 m_1$  est pair. Or  $\exists p_1, n + p_1 m_1$  est pair ssi  $n$  est pair ou  $n + m_1$  est pair, et  $\exists p_1, m_2 - n + p_1 m_1$  est pair, ssi  $m_2 - n$  pair ou  $m_2 - n$  et  $m_1$  impairs, ssi  $m_2 + n$  est pair ou  $m_2 + n$  et  $m_1$  impairs. Si  $m_2 + n$  est pair, trivialement  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair. Si  $m_2 + n$  et  $m_1$  sont impairs, alors  $n$  ou  $m_2$  est pair, et alors  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair. Ainsi, dans tous les cas, si  $u \sim v$  alors  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair.

Réciproquement, si  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair, un des facteurs  $n, (n + m_1), (n + m_2)$  est pair. Si  $n$  est pair, alors  $h^{\frac{n}{2}} a$  conjugue  $u$  en  $v$ . Si  $(n + m_1)$  est pair, alors  $h^{\frac{n + m_1}{2}} x_1 a$  conjugue  $u$  en  $v$ . Si  $(n + m_2)$  est pair, alors  $(m_2 - n)$  est pair, et  $h^{\frac{m_2 - n}{2}} x_2 a$  conjugue  $u$  en  $v$ . Ainsi,  $u \sim v$  ssi  $n(n + m_1)(n + m_2)$  est pair. ■

Ce résultat s'exprime sous une forme particulièrement simple, dans le cas où  $M$  est à bord non vide. Cela provient du fait que dans le groupe d'un fibré de Seifert

à bord non vide, et à base orientable, la classe  $h$  d'une fibre régulière a une image d'ordre infini dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ , par l'homomorphisme de Hurewicz.

**Proposition 5.5.2** *Soit  $M$  un espace fibré de Seifert, à bord non vide, et ayant un groupe infini. Nous conservons les notations précédentes. Soient  $u$  et  $v$ , des éléments de  $\pi_1(M)$  qui ne sont pas dans la fibre  $N$ , et supposons qu'il existe  $\underline{a} \in \pi_1(M)/N$ , qui conjugue  $\underline{u}$  en  $\underline{v}$  dans  $\pi_1(M)/N$ . Alors, si  $a \in \rho^{-1}(\underline{a})$ , est un élément arbitraire,*

$$a.u.a^{-1} = vh^n \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

où  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ , ssi l'on vérifie l'une des conditions suivantes :

- la base est non-orientable et :
  - (i)  $v \notin \Pi$ , et  $n$  est pair.
  - (ii)  $v \in \Pi$ , et soit  $n = 0$ , soit  $n$  est pair et  $\mathcal{Z}(vh^{\frac{n}{2}}) \notin \Pi$ .
- la base est orientable, et  $n = 0$ .

**Démonstration** Reprenons les notations de la proposition précédente. Puisque  $\pi_1(M)/N$  est un produit libre de groupes cycliques, le centralisateur de tout élément de  $\pi_1(M)/N$  est cyclique.

Supposons tout d'abord que la base soit orientable. Alors  $h$  est d'ordre infini en homologie. Ainsi la relation,

$$[x, v] = h^m \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

implique  $m = 0$  (rappelons que le noyau de l'application de Hurewicz est le sous-groupe commutateur  $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$  de  $\pi_1(M)$ ). Ainsi, avec la proposition 5.5.1,  $u \sim v$  ssi  $0/n$ , ssi  $n = 0$ .

Supposons maintenant que la base soit non orientable. Dans cas,  $h$  est d'ordre 2 en homologie. La relation précédente implique donc que  $m$  est pair. Si  $v \notin \Pi$ , alors avec la proposition 5.5.1,  $u \sim v$  ssi  $n$  est pair.

Si  $v \in \Pi$ . Si  $x \in \Pi$ , alors la relation  $[x, v] = h^m$  a lieu dans  $\Pi$ . Or  $\Pi$  est le groupe fondamental du revêtement d'ordre 2  $\widetilde{M}$  dit «d'orientation» (cf. [JS]), de  $M$ , qui admet une fibration de Seifert ayant pour base un (vrai) revêtement d'orientation de la base de  $M$ , et pour laquelle  $h$  se relève en la classe d'une fibre régulière dans  $\pi_1(\widetilde{M})$ . Ainsi, le même argument que dans le cas où la base est orientable permet de montrer que  $m = 0$ , et donc, avec la proposition 5.5.1,  $u \sim v$  ssi  $n = 0$ .

Si  $x \notin \Pi$ . Si  $n \neq 0$ , avec la proposition 5.5.1,  $u \sim v$  ssi  $n = m = 2k$ . Ainsi,  $n$  est pair. Alors,

$$\begin{aligned} xvx^{-1} &= vh^n \\ \iff xvx^{-1}h^{-\frac{n}{2}} &= vh^{\frac{n}{2}} \\ \iff xvh^{\frac{n}{2}}x^{-1} &= vh^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$



Ainsi, si  $u \sim v$ , alors  $x \in \mathcal{Z}(vh^{\frac{n}{2}})$ , et donc  $\mathcal{Z}(vh^{\frac{n}{2}}) \not\subset \Pi$ . Réciproquement, soit  $y \in \mathcal{Z}(vh^{\frac{n}{2}}) - \Pi$ , alors,

$$\begin{aligned} yvh^{\frac{n}{2}}y^{-1} &= vh^{\frac{n}{2}} \\ \iff yvy^{-1}h^{-\frac{n}{2}} &= vh^{\frac{n}{2}} \\ \iff yvy^{-1} &= vh^n \end{aligned}$$

et donc, avec la proposition 5.5.1,  $u \sim v$ . ■

La proposition 5.5.1 nous permet déjà de résoudre le problème de la conjugaison, pour la plupart des espaces fibrés de Seifert. Nous pouvons supposer que  $\pi_1(M)$  est infini. Alors  $M$  est à bord non vide, ou contient le groupe d'une surface fermée  $F$  comme sous-groupe d'indice fini, vérifiant  $\chi(F) \leq 0$ . Supposons que soit  $M$  n'est pas fermée, soit  $\chi(F) < 0$ . Alors  $\pi_1(M)/N$  est un groupe hyperbolique au sens de Gromov. Dans un groupe hyperbolique, le centralisateur d'un élément est virtuellement cyclique (corollaire 7.2, [CDP]), ainsi avec la proposition 5.3.2, le centralisateur d'un élément dans  $\pi_1(M)/N$  est cyclique. Donné un élément infini de  $\pi_1(M)/N$ , on peut algorithmiquement déterminer son centralisateur (par l'obtention d'un générateur). On se servira pour cela du corollaire 4.2.4, qui utilisé plusieurs fois permet de déterminer une racine maximale d'un élément d'ordre infini, dans un groupe hyperbolique.

Considérons deux éléments  $u, v \in \pi_1(M)$ , donnés par des mots sur les générateurs d'une présentation canonique de  $\pi_1(M)$ . On veut décider si  $u, v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$ . On commence par décider avec l'algorithme de conjugaison dans un groupe hyperbolique (ou dans un groupe Fuchsien), si  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)/N$ . Si ce n'est pas le cas, alors  $u$  et  $v$  ne sont pas conjugués dans  $\pi_1(M)$ . Si  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)/N$ , alors, on détermine un élément  $\underline{a}$  qui conjugue  $\underline{u}$  en  $\underline{v}$  (en général un algorithme de conjugaison explicite un tel élément). Si ce n'est pas le cas, on pourra toujours en déterminer un, en utilisant l'algorithme du mot). On utilise ensuite la proposition 4.2.4 pour déterminer si  $\underline{v}$  est de torsion. Alternativement, si un élément  $\underline{v}$  est de torsion, avec la proposition 5.3.1, son ordre divise l'indice d'une des fibres exceptionnelles. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)/N$ , à  $\underline{v}^{\alpha_1}, \dots, \underline{v}^{\alpha_q}$ , pour décider si  $\underline{v}$  est de torsion. Si  $\underline{v}$  est d'ordre infini, on détermine un générateur  $\underline{x}$  du centralisateur  $\mathcal{Z}(\underline{v})$ . Enfin, on se donne arbitrairement des représentants  $a \in \rho^{-1}(\underline{a})$ , et  $x \in \rho^{-1}(\underline{x})$ , et on utilise l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$ , pour déterminer  $n$  et  $m$ , tels que  $aua^{-1} = vh^n$ , et  $xvx^{-1} = vh^m$ . Il suffit alors d'utiliser la proposition 5.5.1, pour décider si  $u \sim v$  dans  $\pi_1(M)$ .

Les cas restant correspondent à  $M$  fermée, et  $\pi_1(M)/N$  contenant un sous-groupe d'indice fini, isomorphe au groupe d'une surface  $F$  avec  $\chi(F) = 0$ . Il existe 7 groupes Fuchsien vérifiant ces conditions, ils sont caractérisés dans le théorème 5.3.1. Dans ce cas,  $\pi_1(M)/N$  contient  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  comme sous-groupe d'indice fini, c'est donc un groupe euclidien de dimension 2, et alors il est biautomatique, mais non hyperbolique (car contenant  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ). Le centralisateur d'un élément n'est plus nécessairement cyclique, et nous ne disposons pas à priori, d'algorithme pouvant le déterminer,

à l'exception du cas de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , qui se résout trivialement. Les deux lemmes suivants permettent de lever cette difficulté. Le premier fournit une présentation plus adéquate pour chacun de ces groupes, en ceci qu'elle explicite le sous-groupe libre abélien de rang 2 d'indice fini, et une décomposition en un produit semi-direct d'un groupe de surface euclidienne par un groupe fini. Le second, permet connaissant un élément de déterminer précisément son centralisateur dans  $\pi_1(M)/N$ , par l'obtention de générateurs canoniques. Ceci, combiné avec l'algorithme de la conjugaison dans  $\pi_1(M)/N$ , l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$ , et la proposition 5.5.1, nous permet de résoudre le problème de conjugaison, dans ces derniers cas.

**Lemme 5.5.1 (Présentation pour un groupe Fuchsien cristallographique)**

*Considérons les groupes Fuchiens suivants :*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \mid \underline{a}_1^2 \underline{a}_2^2 = 1 \rangle \\ G_2 &= \langle \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3 \mid \underline{c}_1^2 = \underline{c}_2^2 = \underline{c}_3^2 = (\underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3)^2 = 1 \rangle \\ G_3 &= \langle \underline{c}_1, \underline{c}_2 \mid \underline{c}_1^3 = \underline{c}_2^3 = (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^3 = 1 \rangle \\ G_4 &= \langle \underline{c}_1, \underline{c}_2 \mid \underline{c}_1^4 = \underline{c}_2^4 = (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^2 = 1 \rangle \\ G_5 &= \langle \underline{c}_1, \underline{c}_2 \mid \underline{c}_1^6 = \underline{c}_2^3 = (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^2 = 1 \rangle \\ G_6 &= \langle \underline{a}, \underline{c} \mid \underline{c}^2 = (\underline{a}^2 \underline{c})^2 = 1 \rangle \end{aligned}$$

*Ils admettent aussi pour présentations :*

$$\begin{aligned} G_1 &\cong \langle \underline{a}_1, t_1, t_2 \mid \underline{a}_1^2 = t_1, [t_1, t_2] = 1, \underline{a}_1 t_2 \underline{a}_1^{-1} = t_2^{-1} \rangle \\ G_2 &\cong \langle c, t_1, t_2 \mid c^2 = 1, [t_1, t_2] = 1, ct_1 c^{-1} = t_1^{-1}, ct_2 c^{-1} = t_2^{-1} \rangle \\ G_3 &\cong \langle c, t_1, t_2 \mid c^3 = 1, [t_1, t_2] = 1, ct_1 c^{-1} = t_2, ct_2 c^{-1} = t_1^{-1} t_2^{-1} \rangle \\ G_4 &\cong \langle c, t_1, t_2 \mid c^4 = 1, [t_1, t_2] = 1, ct_1 c^{-1} = t_2, ct_2 c^{-1} = t_1^{-1} \rangle \\ G_5 &\cong \langle c, t_1, t_2 \mid c^6 = 1, [t_1, t_2] = 1, ct_1 c^{-1} = t_2, ct_2 c^{-1} = t_1^{-1} t_2 \rangle \\ G_6 &\cong \langle \underline{a}, c, t_1, t_2 \mid \underline{a}^2 = t_1, [t_1, t_2] = 1, \underline{a} t_2 \underline{a}^{-1} = t_2^{-1}, \\ &\quad c^2 = 1, ct_1 c^{-1} = t_1^{-1}, ct_2 c^{-1} = t_2^{-1}, c \underline{a} c^{-1} = t_2 \underline{a}^{-1} \rangle \end{aligned}$$

**Remarques :** – Il ne manque que  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  pour obtenir une liste exhaustive des groupes Fuchiens contenant  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  comme sous-groupe – de surcroît d'indice fini –, les groupes Fuchiens cristallographiques. Bien sûr  $G_1$  est le groupe de la bouteille de Klein. Il est sans torsion, et contient  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  comme sous-groupe d'indice 2.  $G_2, G_3, G_4, G_5$  sont des produits semi-directs de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , respectivement par  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$ . Quant à  $G_6$ , c'est un produit semi-direct du groupe de la bouteille de Klein par  $\mathbb{Z}_2$ . C'est aussi une extension finie de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

– L'intérêt des présentations que nous obtenons, est qu'elles explicitent le sous-groupe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  d'indice 2, et la structure de produit semi-direct, pour chacun de ces groupes.

– Remarquons que si  $\underline{\Pi}_1, \underline{\Pi}_6$  sont les sous-groupes d'orientation respectifs de  $G_1, G_6$ , alors ils sont engendrés pour ces nouvelles présentations, respectivement par  $\underline{a}_1^2, t_1, t_2$  et  $\underline{a}^2, c, t_1, t_2$ .

**Démonstration** Procéder par changements de Tietze. Nous n'indiquons que les points importants.

**Pour  $G_1$ .** Poser  $t_1 = \underline{a}_1^2$ , et  $t_2 = \underline{a}_1^{-1}\underline{a}_2^{-1}$ . Remarquons que  $\underline{a}_1^2 = \underline{a}_2^{-2}$  engendre le centre. On a alors :

$$\underline{a}_1 t_2 \underline{a}_1^{-1} = \underline{a}_1 \underline{a}_1^{-1} \underline{a}_2^{-1} \underline{a}_1^{-1} = \underline{a}_2^{-1} \underline{a}_1^{-1} = \underline{a}_2^{-2} \cdot \underline{a}_2 \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1^{-2} = \underline{a}_2 \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2^{-2} \underline{a}_1^{-2} = t_2^{-1} \cdot 1 = t_2^{-1}$$

Comme conséquence, on a la relation  $[t_1, t_2] = 1$ .  $\square$

**Pour  $G_2$ .** Posons  $c = \underline{c}_1$ ,  $t_1 = \underline{c}_2 \underline{c}_1$ , et  $t_2 = \underline{c}_2 \underline{c}_3$ . Les éléments  $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$  sont d'ordre 2. On obtient les relations :

$$c t_1 c^{-1} = \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 \underline{c}_1^{-1} = \underline{c}_1 \underline{c}_2 = \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} = t_1^{-1}$$

$$\begin{aligned} c t_2 c^{-1} &= \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3 \underline{c}_1^{-1} \\ &= (\underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3)^2 (\underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3)^{-1} \underline{c}_1^{-1} \\ &= (\underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3)^{-1} \underline{c}_1^{-1} \\ &= \underline{c}_3^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-2} \\ &= \underline{c}_3^{-1} \underline{c}_2^{-1} \\ &= t_2^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= \underline{c}_2 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 \underline{c}_3 \cdot \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \cdot \underline{c}_3^{-1} \underline{c}_2^{-1} \\ &= \underline{c}_2 \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_3^{-1} \underline{c}_2^{-1} \\ &= \underline{c}_2 \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3 \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3 \underline{c}_2 \\ &= \underline{c}_2 (\underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3)^2 \underline{c}_2 \\ &= \underline{c}_2^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

**Pour  $G_3$ .** Posons  $c = \underline{c}_1^{-1}$ ,  $t_1 = \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2$ , et  $t_2 = \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1$ . Remarquons que  $\underline{c}_1^{-2} = \underline{c}_1$  et  $\underline{c}_2^{-2} = \underline{c}_2$ . On obtient alors les relations :

$$c t_1 c^{-1} = \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \underline{c}_1 = \underline{c}_1^{-2} \underline{c}_2 \underline{c}_1 = \underline{c}_1^{-3} \cdot \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 = 1 \cdot t_2 = t_2$$

$$c t_2 c^{-1} = \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 \underline{c}_1 = \underline{c}_2 \underline{c}_1^2 = \underline{c}_2^{-2} \underline{c}_1^2 = \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^2 = \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} = t_1^{-1} t_2^{-1}$$

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} \\ &= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2^{-2} \underline{c}_1^{-1} \\ &= \underline{c}_1^2 \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \\ &= \underline{c}_1 \cdot (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^3 \cdot \underline{c}_1^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**Pour  $G_4$ .** Posons  $c = c_1$ ,  $t_1 = c_2 c_1^{-1}$ , et  $t_2 = c_1 c_2 c_1^2$ . On obtient les relations :

$$ct_1 c^{-1} = c_1 c_2 c_1^{-1} c_1^{-1} = c_1 c_2 c_1^{-2} = c_1 c_2 c_1^2 = t_2$$

$$\begin{aligned} ct_2 c^{-1} &= c_1 c_1 c_2 c_1^2 c_1^{-1} \\ &= c_1^2 c_2 c_1 \\ &= c_1 \cdot c_1 c_2 \cdot c_1 c_2 \cdot c_2^{-1} \\ &= c_1 (c_1 c_2)^2 c_2^{-1} \\ &= c_1 c_2^{-1} \\ &= t_1^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= c_2 c_1^{-1} \cdot c_1 c_2 c_1^2 \cdot c_1 c_2^{-1} \cdot c_1^{-2} c_2^{-1} c_1^{-1} \\ &= c_2^2 c_1^3 c_2^{-1} c_1^{-2} c_2^{-1} c_1^{-1} \\ &= c_2^2 c_1^3 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2^{-1} c_1^{-1} \\ &= c_2^2 c_1^3 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2 (c_1 c_2)^{-2} \\ &= c_2^2 c_1^3 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2 \\ &= c_2^{-2} c_1^{-1} c_2^{-1} c_1^{-1} c_2 \\ &= c_2^{-1} \cdot (c_1 c_2)^{-2} \cdot c_2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**Pour  $G_5$ .** Posons  $c = c_1$ ,  $t_1 = c_1^{-2} c_2$ , et  $t_2 = c_1^{-1} c_2 c_1^{-1}$ . On a alors,

$$ct_1 c^{-1} = c_1 c_1^{-2} c_2 c_1^{-1} = c_1^{-1} c_2 c_1^{-1} = t_2$$

$$\begin{aligned} ct_2 c^{-1} &= c_1 c_1^{-1} c_2 c_1^{-1} c_1^{-1} \\ &= c_2 c_1^{-2} \\ &= c_2^2 c_2^{-1} c_1^{-2} \\ &= c_2^2 (c_1 c_2)^2 c_2^{-1} c_1^{-2} \\ &= c_2^2 c_1 c_2 c_1 c_1^{-2} \\ &= c_2^2 c_1 c_2 c_1^{-1} \\ &= c_2^{-1} c_1 c_2 c_1^{-1} \\ &= c_2^{-1} c_1^2 \cdot c_1^{-1} c_2 c_1^{-1} \\ &= t_1^{-1} t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[t_1, t_2] &= \underline{c}_1^{-2} \cdot \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \cdot \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^2 \cdot \underline{c}_1 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \\
&= \underline{c}_1^{-2} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^3 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \\
&= \underline{c}_1^{-2} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_1^4 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \\
&= \underline{c}_1^{-2} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^{-2} \underline{c}_1^4 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \\
&= \underline{c}_1^{-2} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 \underline{c}_1^4 \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1 \\
&\sim \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 \underline{c}_1^4 \underline{c}_2^{-1} \\
&= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2 \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_1^5 \underline{c}_2^{-1} \\
&= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^{-2} \underline{c}_1^5 \underline{c}_2^{-1} \\
&= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^2 \underline{c}_1^5 \underline{c}_2^{-1} \\
&= \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \underline{c}_1^{-1} \underline{c}_2^{-1} \\
&\sim (\underline{c}_1 \underline{c}_2)^{-2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

**Pour  $G_6$ .** Posons  $c = \underline{c}$ ,  $t_1 = \underline{a}^2$ , et  $t_2 = (\underline{c}\underline{a})^2$ . Il est clair que  $c$  est d'ordre 2. Remarquons que  $\underline{a}^2$  engendre un sous-groupe normal cyclique dans  $G_6$ , et que  $\underline{c}\underline{a}^2\underline{c}^{-1} = \underline{a}^{-2}$ . On obtient,

$$\begin{aligned}
[t_1, t_2] &= \underline{a}^2 \cdot (\underline{c}\underline{a})^2 \cdot \underline{a}^{-2} \cdot (\underline{c}\underline{a})^{-2} \\
&= \underline{a}^2 \underline{c} \underline{a} \underline{c} \underline{a} \underline{a}^{-2} \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \\
&= \underline{a}^2 \underline{c} \underline{a} \underline{c} \underline{a}^{-2} \underline{c}^{-1} \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \\
&= \underline{a}^2 \underline{c} \underline{a} \underline{a}^2 \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \\
&= \underline{a}^2 \underline{c} \underline{a}^2 \underline{c}^{-1} \\
&= \underline{a}^2 \underline{a}^{-2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{a} t_2 \underline{a}^{-1} &= \underline{a} \underline{c} \underline{a} \underline{c} \underline{a} \underline{a}^{-1} \\
&= \underline{a} \underline{c} \underline{a} \underline{c} \\
&= \underline{a}^{-2} \underline{a} \underline{a}^2 \underline{c} \underline{a} \underline{c} \\
&= \underline{a}^{-2} \underline{a} \underline{c} \underline{a}^{-2} \underline{a} \underline{c} \\
&= \underline{a}^{-1} \underline{c} \underline{a}^{-1} \underline{c} \\
&= \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \underline{a}^{-1} \underline{c}^{-1} \\
&= t_2^{-1}
\end{aligned}$$

$$c t_1 c^{-1} = \underline{c} \underline{a}^2 \underline{c}^{-1} = \underline{a}^{-2} = t_1^{-1}$$

$$\begin{aligned}
ct_2c^{-1} &= \underline{c}\underline{c}\underline{a}\underline{c}\underline{a}\underline{c}^{-1} \\
&= \underline{a}\underline{c}\underline{a}\underline{c} \\
&= \underline{a}^{-2}\underline{a}\underline{a}^2\underline{c}\underline{a}\underline{c} \\
&= \underline{a}^{-2}\underline{a}\underline{c}\underline{a}^{-2}\underline{a}\underline{c} \\
&= \underline{a}^{-1}\underline{c}^{-1}\underline{a}^{-1}\underline{c}^{-1} \\
&= t_2^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\underline{a}c^{-1} &= \underline{c}\underline{a}\underline{c} \\
&= \underline{c}\underline{a}\underline{c}\underline{a}\underline{a}^{-1} \\
&= t_2\underline{a}^{-1}
\end{aligned}$$

■

**Lemme 5.5.2 (Centralisateurs des groupes Fuchsien cristallographiques)**

Considérons les groupes  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  et  $G_6$  apparaissant dans le lemme 5.5.1, et munissons-les des présentations que le lemme nous fournit. Elles explicitent pour chacun des  $G_i$  un sous-groupe d'indice fini, libre abélien de rang 2, engendré par  $t_1, t_2$ ; notons le  $H_i$ . Nous décrivons le centralisateur d'un élément quelconque de ces groupes. Si  $u \in G_i$ , notons  $\mathcal{Z}(u)$  son centralisateur dans  $G_i$ .

Pour  $G_1$ : Tout élément de  $G_1$  s'écrit de façon unique, sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2}$  ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}$ . Le centralisateur d'un élément non trivial  $u \in G_1$ , est décrit par :

$u \in H_1$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} G_1 \cong \pi_1(\mathbb{KB}_2) & \text{si } u \in \langle t_1 \rangle \\ H_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } u \notin \langle t_1 \rangle \end{cases}$
$u \in H_1 \cdot \underline{a}$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_2^{n_2} \underline{a} \rangle$

Pour  $G_2$ : Tout élément de  $G_2$  s'écrit de façon unique sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2}$  ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ . Le centralisateur d'un élément non trivial  $u$  de  $G_2$  est décrit par :

$u \in H_2$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = H_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$u \in H_2 \cdot c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$

Pour  $G_3$ : Tout élément de  $G_3$  s'écrit de façon unique sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ . Le centralisateur d'un élément non trivial  $u$  de  $G_3$  est décrit par :

$u \in H_3$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = H_3 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$u \in H_3 \cdot c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$
$u \in H_3 \cdot c^2$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_2} t_2^{n_2 - n_1} c \rangle$

Pour  $G_4$ : Tout élément de  $G_4$  s'écrit de façon unique sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$ . Le centralisateur d'un élément non trivial  $u$  de  $G_4$  est décrit par :

$u \in H_4$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = H_4 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$u \in H_4 \cdot c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$
$u \in H_4 \cdot c^2$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} \langle t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} c \rangle & \text{si } n_1 + n_2 \text{ pair} \\ \langle u \rangle & \text{sinon} \end{cases}$
$u \in H_4 \cdot c^3$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c \rangle$

Pour  $G_5$ : Tout élément de  $G_5$  s'écrit de façon unique sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^5$ . Le centralisateur d'un élément non

trivial  $u$  de  $G_5$  est décrit par :

$u \in H_5$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = H_5 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$u \in H_5.c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$
$u \in H_5.c^2$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} \langle t_1^{\frac{2n_1+n_2}{3}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{3}} c \rangle & \text{si } 3/(n_1 - n_2) \\ \langle u \rangle & \text{sinon} \end{cases}$
$u \in H_5.c^3$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} \langle t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c \rangle & \text{si } n_1 \text{ et } n_2 \text{ pairs} \\ \langle u \rangle & \text{sinon} \end{cases}$
$u \in H_5.c^4$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} \langle t_1^{\frac{n_1+2n_2}{3}} t_2^{-\frac{2n_1+n_2}{3}} c \rangle & \text{si } 3/(n_1 - n_2) \\ \langle t_1^{n_1+n_2} t_2^{-n_1} c^2 \rangle & \text{sinon} \end{cases}$
$u \in H_5.c^5$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^5$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_2} t_2^{-(n_1+n_2)} c \rangle$

Pour  $G_6$ : Tout élément de  $G_6$  s'écrit uniquement sous la forme  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{c}$ , ou  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a} \underline{c}$ . Notons  $K_6$  le sous-groupe de  $G_6$  engendré par  $\underline{a}, t_1, t_2$ ; il est isomorphe au groupe de la bouteille de Klein. Le centralisateur d'un élément non trivial  $u$  de  $G_6$  est décrit par :

$u \in H_6$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$	$\mathcal{Z}(u) = \begin{cases} \langle \underline{a} c, t_1 \rangle \cong \pi_1(\mathbb{KB}_2) & \text{si } u \in \langle t_2 \rangle \\ K_6 \cong \pi_1(\mathbb{KB}_2) & \text{si } u \in \langle t_1 \rangle \\ H_6 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$
$u \in H_6.\underline{a}$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_2^{n_2} \underline{a} \rangle$
$u \in H_6.c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$
$u \in H_6.\underline{a}c$ $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}c$	$\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_1} \underline{a}c \rangle$

**Démonstration** Nous démontrerons séparément les six cas. Pour chacun des groupes considérés, nous travaillerons avec la présentation fournie par le lemme 5.5.1.

**Pour  $G_1$ .** Le groupe  $G_1$  est le groupe de la bouteille de Klein. Avec les relations de  $G_1$ , il est clair que tout élément de  $G_1$  s'écrit de façon unique sous une des formes fournies par le lemme. Notons  $v_1 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a}$ .

Si  $u \in H_1$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ . Puisque  $H_1$  est abélien,  $H_1 \subset \mathcal{Z}(u)$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} = t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} \underline{a} \\ v_1.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} t_1^{n_1} t_2^{n_2} = t_1^{n_1+m_1} t_2^{m_2-n_2} \underline{a} \end{aligned}$$

Ainsi  $u.v_1 = v_1.u$  ssi  $n_2 = 0$ . Donc, si  $u \in \langle t_1 \rangle$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = G_1 \cong \pi_1(\mathbb{KB}_2)$ . Si  $u \in H_1 - \langle t_1 \rangle$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = H_1$ .



Si  $u \in H_1.\underline{a}$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{a}$ . Avec ce qui précède, les seuls éléments de  $H_1$  qui commutent avec  $u$ , sont les éléments de  $\langle t_1 \rangle$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{a}t_1^{m_1}t_2^{m_2}\underline{a} \\ &= t_1^{n_1+m_1}t_2^{n_2-m_2}\underline{a}^2 \\ &= t_1^{n_1+m_1}t_2^{n_2-m_2}t_1 \\ &= t_1^{n_1+m_1+1}t_2^{n_2-m_2} \end{aligned}$$

$$v_1.u = t_1^{m_1+n_1+1}t_2^{m_2-n_2}$$

Ainsi,  $u$  et  $v_1$  commutent ssi  $m_2 = n_2$ . Dans ce cas,  $v_1 = u.t_1^{m_1-n_1}$ . Donc si  $u \in H_1.\underline{a}$ ,  $\mathcal{Z}(u)$  est engendré par  $t_1$  et  $u$ . En particulier,  $\mathcal{Z}(u)$  admet aussi pour générateurs  $t_2^{n_2}\underline{a}$  et  $t_1$ . Or,

$$\begin{aligned} (t_2^{n_2}\underline{a})^2 &= t_2^{n_2}\underline{a}t_2^{n_2}\underline{a} \\ &= t_2^{n_2-n_2}\underline{a}^2 \\ &= t_1 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $u \in H_1.\underline{a}$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle t_2^{n_2}\underline{a} \rangle$ . □

**Pour  $G_2$ .** Le groupe  $G_2$  est un produit semi-direct de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_2$  par  $\mathbb{Z}_2 = \langle c \rangle$ . On a alors l'existence et l'unicité de l'écriture de tout élément sous une des formes décrites. Notons  $v_1 = t_1^{m_1}t_2^{m_2}c \in H_2.c$ .

Si  $u \in H_2$ , notons  $u = t_1^{n_1}t_2^{n_2}$ . Il est clair que  $H_2 \subset \mathcal{Z}(u)$ . de plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1}t_2^{n_2}t_1^{m_1}t_2^{m_2}c = t_1^{n_1+m_1}t_2^{n_2+m_2}c \\ v_1u &= t_1^{m_1}t_2^{m_2}ct_1^{n_1}t_2^{n_2} = t_1^{m_1-n_1}t_2^{m_2-n_2}c \end{aligned}$$

Et donc,  $u$  et  $v_1$  commutent ssi  $n_1 = n_2 = 0$ . Ainsi, si  $u$  est un élément non trivial de  $H_2$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = H_2$ .

Si  $u \in H_2.c$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1}t_2^{n_2}c$ . Comme nous venons de le voir,  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_2$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1}t_2^{n_2}ct_1^{m_1}t_2^{m_2}c = t_1^{n_1-m_1}t_2^{n_2-m_2} \\ v_1.u &= t_1^{m_1-n_1}t_2^{m_2-n_2} \end{aligned}$$

et donc,  $u$  et  $v_1$  commutent ssi  $m_1 = n_1, m_2 = n_2$ , i.e.,  $u = v_1$ . Ainsi, si  $u \in H_2.c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ . □

**Pour  $G_3$ .** Le groupe  $G_3$  est un produit semi-direct de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_3$  par  $\mathbb{Z}_3 = \langle c \rangle$ . On a l'existence et l'unicité de l'écriture de  $u$  sous une des formes décrites. Notons  $v_1 = t_1^{m_1}t_2^{m_2}c \in H_3.c$  et  $v_2 = t_1^{m_1}t_2^{m_2}c^2 \in H_3.c^2$ . Commençons par établir les relations :

$$c^2t_1c^{-2} = ct_2c^{-1} = t_1^{-1}t_2^{-1}$$

$$c^2 t_2 c^{-2} = c t_1^{-1} t_2^{-1} c^{-1} = t_2^{-1} t_2 t_1 = t_1$$

Si  $u \in H_3$ , notons  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ . Puisque  $H_3$  est abélien,  $H_3 \subset \mathcal{Z}(u)$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_1-n_2} c \end{aligned}$$

$$u.v_1 = v_1.u \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 + n_1 = m_1 - n_2 \\ m_2 + n_1 - n_2 = m_2 + n_2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 = n_2 = 0$$

Ainsi,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_3.c$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1+n_2-n_1} t_2^{m_2-n_1} c^2 \end{aligned}$$

$$u.v_2 = v_2.u \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 + n_1 = m_1 + n_2 - n_1 \\ m_2 + n_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 = n_2 = 0$$

Ainsi, si  $u$  est un élément non trivial de  $H_3$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = H_3$ .

Si  $u \in H_3.c$ ,  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ . Comme nous l'avons vu précédemment,  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_3$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1-m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_1-n_2} c^2 \end{aligned}$$

$$u.v_1 = v_1.u \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_2 \\ n_2 + m_1 - m_2 = m_2 + n_1 - n_2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

Ainsi, si  $v_1$  et  $u$  commutent, alors  $v_1 = u$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1-m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^3 \\
&= t_1^{m_1-n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1}
\end{aligned}$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 - m_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 - n_2 \\ m_2 = n_1 \end{cases}$$

Notons  $w_2$  l'élément de  $H_3.c^2$  qui commute avec  $u$ ,  $w_2 = t_1^{n_1-n_2} t_2^{n_1}$ . Or,

$$\begin{aligned}
u^2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\
&= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2^{-1})_2^m c^2 \\
&= t_1^{n_1-n_2} t_2^{n_1} \\
&= w_2
\end{aligned}$$

Ainsi, si  $u \in H_3.c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_3.c^2$ ,  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ . Avec ce que nous avons déjà vu,  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_3$ , et  $u$  commute avec un élément  $w \in H_3.c$ , ssi  $w^2 = u$ . Or,

$$\begin{aligned}
(t_1^{n_2} t_2^{n_2-n_1} c)^2 &= t_1^{n_2} t_2^{n_2-n_1} c t_1^{n_2} t_2^{n_2-n_1} c \\
&= t_1^{n_2} t_2^{n_2-n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{n_2-n_1} c^2 \\
&= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2
\end{aligned}$$

c'est à dire que tout élément de  $H_3.c^2$  admet une (unique) racine carrée. De plus,

$$\begin{aligned}
u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\
&= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2^{-1})^{m_1} t_1^{m_2} c^4 \\
&= t_1^{n_1-m_1+m_2} t_2^{n_2-m_1} c
\end{aligned}$$

$$v_2.u = t_1^{m_1-n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 + m_2 = m_1 - n_1 + n_2 \\ n_2 - m_1 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

Ainsi, si  $u \in H_3.c^2$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_2} t_2^{n_2-n_1} c \rangle$ . □

**Pour  $G_4$ .** Le groupe  $G_4$  est un produit semi-direct de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_4$  par  $\mathbb{Z}_4 = \langle c \rangle$ . Ainsi, on a l'existence et l'unicité de l'écriture d'un élément  $u \in G_4$ , sous une des formes décrites. Notons  $v_1 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \in H_4.c$ ,  $v_2 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \in H_4.c^2$ ,  $v_3 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \in H_4.c^3$ . Commençons par établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
c^2 t_1 c^{-2} &= c t_2 c^{-1} = t_1^{-1} & c^3 t_1 c^{-3} &= c t_1^{-1} c^{-1} = t_2^{-1} \\
c^2 t_2 c^{-2} &= c t_1^{-1} c^{-1} = t_2^{-1} & c^3 t_2 c^{-3} &= c t_2^{-1} c^{-1} = t_1
\end{aligned}$$

Si  $u \in H_4$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ . Puisque  $H_4$  est abélien,  $H_4 \subset \mathcal{Z}(u)$ . On a,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{n_1} t_1^{-n_2} c \\ &= t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_1} c \end{aligned}$$

$$u.v_1 = v_1.u \iff \begin{cases} n_1 + m_1 = m_1 - n_2 \\ n_2 + m_2 = m_2 + n_1 \end{cases} \iff n_1 = n_2 = 0$$

Ainsi,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_4.c$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} c^2 \end{aligned}$$

et donc  $u.v_2 = v_2.u$  ssi  $n_1 = n_2 = 0$ , ainsi  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_4.c^2$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} t_1^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c^3 \end{aligned}$$

et donc  $u$  et  $v_3$  commutent ssi  $n_1 = n_2 = 0$ . Ainsi, dans le cas où  $u \in H_4$ ,  $\mathcal{Z}(u) = H_4$ .

Si  $u \in H_4.c$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ . Nous venons de voir, que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_4$ . On a,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} t_1^{-m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1} c^2 \end{aligned}$$

$$v_1.u = t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_1} c^2$$

$$u.v_1 = v_1.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_2 \\ n_2 + m_1 = m_2 + n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

et donc, si  $v_1$  commute avec  $u$ , alors  $v_1 = u$ .

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} t_1^{-m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1} c^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^3 \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} c^3 \end{aligned}$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_1 \\ n_2 + m_1 = m_2 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 - n_2 \\ m_2 = n_1 + n_2 \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  commute avec  $w_2 = t_1^{n_1-n_2} t_2^{n_1+n_2} c^2$ . Or,

$$\begin{aligned} u^2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{n_1} t_1^{-n_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1-n_2} t_2^{n_1+n_2} c^2 \\ &= w_2 \end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} t_1^{-m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} t_1^{n_2} c^4 \\ &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} \end{aligned}$$

$$u.v_3 = v_3.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -n_2 \\ m_2 = n_1 \end{cases}$$

Et donc,  $u$  et  $w_3 = t_1^{-n_2} t_2^{n_1} c^3$  commutent. Or,

$$\begin{aligned} u^3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{n_1} t_1^{-n_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{n_1-n_2} t_2^{n_1+n_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^3 \\ &= t_1^{-n_2} t_2^{n_1} c^3 \\ &= w_3 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $u \in H_4.c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_4.c^2$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_4$ , et que  $u$  commute avec un élément  $w \in H_4.c$  ssi  $w^2 = u$ . Dans quels cas,  $u$  admet-il une racine carrée?

Notons  $w = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$  et supposons que  $w^2 = 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} w^2 &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_2^{p_1} t_1^{-p_2} c^2 \\ &= t_1^{p_1-p_2} t_2^{p_1+p_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \end{aligned}$$

et donc  $u$  admet une racine carrée ssi le système suivant admet deux solutions  $p_1, p_2$  entières :

$$\begin{cases} n_1 = p_1 - p_2 \\ n_2 = p_1 + p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p_1 = n_1 + n_2 \\ 2p_2 = n_2 - n_1 \end{cases}$$

c'est à dire lorsque  $n_1 + n_2$  est pair. Dans ce cas,

$$w = t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} c$$

De plus, on vérifie,

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} \end{aligned}$$

$$v_2.u = t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2}$$

et donc  $u$  et  $v_2$  commutent lorsque  $v_2 = u$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} t_1^{n_2} c^5 \\ &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c \end{aligned}$$

$$u.v_3 = v_3.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 = m_1 + n_2 \\ n_2 - m_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2m_1 = n_1 - n_2 \\ 2m_2 = n_1 + n_2 \end{cases}$$

Si  $n_1 + n_2$  est impair,  $u$  et  $v_3$  ne commutent pas ; dans le cas contraire,  $u$  commute avec  $w_3 \in H_4.c^3$ , où

$$w_3 = t_1^{\frac{n_1-n_2}{2}} t_2^{\frac{n_1+n_2}{2}} c^3$$

Or, si  $n_1 + n_2$  est pair,  $u$  admet une racine carrée  $w$ , et

$$\begin{aligned} w^3 &= w.u \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} t_2^{n_1} t_1^{-n_2} c^3 \\ &= t_1^{\frac{n_1-n_2}{2}} t_2^{\frac{n_1+n_2}{2}} c^3 \\ &= w_3 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $u \in H_4.c^2$ , alors si  $n_1 + n_2$  est pair,

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w \rangle = \langle t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} c \rangle$$

et sinon,  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_4.c^3$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_4$ . De plus,  $u$  admet une racine cubique  $w_1 = t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c$ , en effet,

$$\begin{aligned} (w_1)^3 &= t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c \\ &= t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c t_1^{n_2} t_2^{-n_1} t_2^{n_2} t_1^{n_1} c^2 \\ &= t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c t_1^{n_1+n_2} t_2^{n_2-n_1} c^2 \\ &= t_1^{n_2} t_2^{-n_1} t_2^{n_1+n_2} t_1^{n_1-n_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \end{aligned}$$

et le seul élément de  $H_4.c$  qui commute avec  $u$  est  $w_1$ , le seul élément de  $H_4.c^2$  qui commute avec  $u$  est  $(w_1)^2$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{-m_1} t_1^{m_2} c^6 \\ &= t_1^{n_1+m_2} t_2^{n_2-m_1} c^2 \\ v_3.u &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} \\ u.v_3 = v_3.u &\iff \begin{cases} n_1 + m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 - m_1 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si  $u \in H_4.c^3$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_2} t_2^{-n_1} c \rangle$ . □

**Pour  $G_5$ .** Le groupe  $G_5$  est un produit semi-direct de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_5$  par  $\mathbb{Z}_6$ , ainsi tout élément de  $G_5$  s'écrit uniquement sous une des formes fournies par le lemme. Notons  $v_1 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \in H_5.c$ ,  $v_2 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \in H_5.c^2$ ,  $v_3 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \in H_5.c^3$ ,  $v_4 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \in H_5.c^4$ , et  $v_5 = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \in H_5.c^5$ . Commençons par établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c^2 t_1 c^{-2} &= c t_2 c^{-1} = t_1^{-1} t_2 & c^3 t_1 c^{-3} &= c t_1^{-1} t_2 c^{-1} = t_1^{-1} \\ c^2 t_2 c^{-2} &= c t_1^{-1} t_2 c^{-1} = t_1^{-1} & c^3 t_2 c^{-3} &= c t_1^{-1} c^{-1} = t_2^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^4 t_1 c^{-4} &= c t_1^{-1} c^{-1} = t_2^{-1} & c^5 t_1 c^{-5} &= c t_2^{-1} c^{-1} = t_1 t_2^{-1} \\
c^4 t_2 c^{-4} &= c t_2^{-1} c^{-1} = t_1 t_2^{-1} & c^5 t_2 c^{-5} &= c t_1 t_2^{-1} c^{-1} = t_1
\end{aligned}$$

Si  $u \in H_5$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ . Puisque  $H_5$  est abélien,  $H_5 \subset \mathcal{Z}(u)$ . De plus,

$$\begin{aligned}
u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\
&= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_2} c \\
&= t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_1+n_2}
\end{aligned}$$

ainsi,  $u$  et  $v_1$  commutent ssi  $n_1 = n_2 = 0$ . Donc, puisque  $u$  est non trivial,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_5.c$ .

$$\begin{aligned}
u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\
&= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1^{-1} t_2)^{n_1} t_1^{-n_2} c^2 \\
&= t_1^{m_1-n_1-n_2} t_2^{m_2+n_1} c^2
\end{aligned}$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 + m_1 = m_1 - n_1 - n_2 \\ n_2 + m_2 = m_2 + n_1 \end{cases} \iff n_1 = n_2 = 0$$

Ainsi  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_5.c^2$ .

$$\begin{aligned}
u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\
&= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^3 \\
&= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} c^3
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $u$  est non trivial,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_5.c^3$ .

$$\begin{aligned}
u.v_4 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \\
&= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_4.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} (t_1 t_2^{-1})^{n_2} c^4 \\
&= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_2-n_1} c^4
\end{aligned}$$



$$u.v_4 = v_4.u \iff \begin{cases} n_1 + m_1 = m_1 + n_2 \\ n_2 + m_2 = m_2 - n_2 - n_1 \end{cases} \iff n_1 = n_2 = 0$$

Ainsi,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_5.c^4$ .

$$\begin{aligned} u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_5.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1 t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^5 \\ &= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c^5 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  et  $v_5$  commutent seulement dans le cas  $n_1 = n_2 = 0$ , que nous avons exclu. Ainsi  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_5.c^5$ . En collectant ces résultats, si  $u \in H_5$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = H_5$ .

Si  $u \in H_5.c$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_5$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_1 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2)^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_2+m_1} c^2 \end{aligned}$$

$$v_1.u = t_1^{m_1-n_2} t_2^{m_2+n_2+n_1} c^2$$

$$u.v_1 = v_1.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_2 \\ n_2 + m_2 + m_1 = m_2 + n_2 + n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

Ainsi, si  $u$  et  $v_1$  commutent, alors  $u = v_1$ .

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2)^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1+m_2} c^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1^{-1} t_2)^{n_1} t_1^{-n_2} c^3 \\ &= t_1^{m_1-n_1-n_2} t_2^{m_2+n_1} c^3 \end{aligned}$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_1 - n_2 \\ n_2 + m_1 + m_2 = m_2 + n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 - n_2 \\ m_2 = 2n_2 + n_1 \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  commute avec  $w_2 = t_1^{n_1-n_2} t_2^{2n_2+n_1} c^2$ . Or,

$$\begin{aligned} u^2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1-n_2} t_2^{2n_2+n_1} c^2 \\ &= w_2 \end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2)^{m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1+m_2} c^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^4 \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} c^4 \end{aligned}$$

$$u.v_3 = v_3.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 - n_1 \\ n_2 + m_1 + m_2 = m_2 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -2n_2 \\ m_2 = 2(n_1 + n_2) \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  et  $w_3 = t_1^{-2n_2} t_2^{2(n_1+n_2)} c^3$  commutent. Or,

$$\begin{aligned} u^3 &= u^2 u \\ &= t_1^{n_1-n_2} t_2^{2n_2+n_1} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{n_1-n_2} t_2^{2n_2+n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_1} t_1^{-n_2} c^3 \\ &= t_1^{-2n_2} t_2^{2(n_1+n_2)} c^3 \\ &= w_3 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} u.v_4 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2)^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1+m_2} c^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} (t_1 t_2^{-1})^{n_2} c^5 \\ &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1-n_2} c^5 \end{aligned}$$

$$u.v_4 = v_4.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 + m_2 = m_2 - n_1 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -(n_1 + 2n_2) \\ m_2 = 2n_1 + n_2 \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  et  $w_4 = t_1^{-(n_1+2n_2)} t_2^{2n_1+n_2} c^4$  commutent. Or,

$$\begin{aligned} u^4 &= u^3 u \\ &= t_1^{-2n_2} t_2^{2(n_1+n_2)} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{-2n_2} t_2^{2(n_1+n_2)} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^4 \\ &= t_1^{-2n_2-n_1} t_2^{2n_1+n_2} c^4 \\ &= w_4 \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{m_1} (t_1^{-1} t_2)^{m_2} c^6 \\ &= t_1^{n_1-m_2} t_2^{n_2+m_1+m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_5.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1 t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^6 \\ &= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} \end{aligned}$$

$$u.v_5 = v_5.u \iff \begin{cases} n_1 - m_2 = m_1 + n_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 + m_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -(n_1 + n_2) \\ m_2 = n_1 \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  et  $w_5 = t_1^{-(n_1+n_2)} t_2^{n_1} c^5$  commutent. Or,

$$\begin{aligned} u^5 &= u^4 u \\ &= t_1^{-2n_2-n_1} t_2^{2n_1+n_2} c^4 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{-2n_2-n_1} t_2^{2n_1+n_2} t_2^{-n_1} (t_1 t_2^{-1})^{n_2} c^5 \\ &= t_1^{-n_2-n_1} t_2^{n_1} c^5 \\ &= w_5 \end{aligned}$$

Ainsi, avec tout ce qui précède, si  $u \in H_5.c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_5.c^2$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_2$ , et que  $u$  commute avec  $w_1 \in H_5.c$  ssi  $w_1^2 = u$ . dans quels cas,  $u$  admet-il une racine carrée?

Supposons que  $w_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$  soit une racine carrée de  $u$ . Alors,

$$\begin{aligned} (w_1)^2 &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_2^{p_1} (t_1^{-1} t_2)^{p_2} c^2 \\ &= t_1^{p_1-p_2} t_2^{p_1+2p_2} c^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $u$  admet une racine carrée,  $w_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$ , lorsque le système suivant admet des solutions entières  $p_1, p_2$ .

$$\begin{cases} n_1 = p_1 - p_2 \\ n_2 = 2p_2 + p_1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \frac{1}{3}(2n_1 + n_2) \\ p_2 = \frac{1}{3}(n_2 - n_1) \end{cases}$$

c'est à dire lorsque 3 divise  $(n_2 - n_1)$ . Dans ce cas,

$$w_1 = t_1^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} t_2^{\frac{1}{3}(n_2-n_1)}$$

De plus,

$$\begin{aligned} u.v_2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2)^{m_1} t_1^{-m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1-m_1-m_2} t_2^{n_2+m_1} c^4 \end{aligned}$$

$$v_2.u = t_1^{m_1-n_1-n_2} t_2^{m_2+n_1} c^4$$

$$u.v_2 = v_2.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 - m_2 = m_1 - n_1 - n_2 \\ n_2 + m_1 = m_2 + n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2)^{m_1} t_1^{-m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1 - m_1 - m_2} t_2^{n_2 + m_1} c^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^5 \\ &= t_1^{m_1 - n_1} t_2^{m_2 - n_2} c^5 \end{aligned}$$

$$u.v_3 = v_3.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 - m_2 = m_1 - n_1 \\ n_2 + m_1 = m_2 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = \frac{2}{3}(n_1 - n_2) \\ m_2 = \frac{2}{3}n_1 + \frac{4}{3}n_2 \end{cases}$$

Ainsi, lorsque  $3/(n_1 - n_2)$ ,  $u$  commute avec  $w_3 = t_1^{\frac{2}{3}(n_1 - n_2)} t_2^{\frac{2}{3}n_1 + \frac{4}{3}n_2} \in H_5.c^3$ . Or, dans ce cas,  $u$  admet pour racine carrée  $w_1$ , et

$$\begin{aligned} (w_1)^3 &= w.u \\ &= t_1^{\frac{1}{3}(2n_1 + n_2)} t_2^{\frac{n_2 - n_1}{3}} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{\frac{1}{3}(2n_1 + n_2)} t_2^{\frac{n_2 - n_1}{3}} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{\frac{2}{3}(n_1 - n_2)} t_2^{\frac{2}{3}(2n_2 + n_1)} c^3 \\ &= w_3 \end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_4 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2)^{m_1} t_1^{-m_2} c^6 \\ &= t_1^{n_1 - m_1 - m_2} t_2^{n_2 + m_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} (t_1 t_2^{-1})^{n_2} c^6 \\ &= t_1^{m_1 + n_2} t_2^{m_2 - n_1 - n_2} \end{aligned}$$

$$u.v_4 = v_4.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 - m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 = m_2 - n_1 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -n_2 \\ m_2 = n_1 + n_2 \end{cases}$$

Ainsi,  $u$  et  $w_4 = t_1^{-n_2} t_2^{n_1 + n_2} c^4$  commutent. Or

$$\begin{aligned} u^2 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2)^{n_1} t_1^{-n_2} c^4 \\ &= t_1^{-n_2} t_2^{n_1 + n_2} \\ &= w_4 \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1^{-1} t_2)^{m_1} t_1^{-m_2} c^7 \\ &= t_1^{n_1-m_1-m_2} t_2^{n_2+m_1} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_5.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1 t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^7 \\ &= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c \end{aligned}$$

$$u.v_5 = v_5.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 - m_2 = m_1 + n_1 + n_2 \\ n_2 + m_1 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{3}(n_1 + 2n_2) \\ m_2 = \frac{1}{3}(2n_1 + n_2) \end{cases}$$

qui admet des solutions entières  $m_1, m_2$  ssi  $3/(n_1 - n_2)$ . Dans ce cas  $u$  commute avec  $w_5$ , où

$$w_5 = t_1^{-\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} c^5$$

Or, si  $3/(n_1 - n_2)$ , alors  $u$  admet pour racine carrée  $w_1$ , avec

$$w_1 = t_1^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} t_2^{\frac{n_2-n_1}{3}} c$$

et dans ce cas,

$$\begin{aligned} (w_1)^5 &= w_1 u^2 \\ &= t_1^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} t_2^{\frac{n_2-n_1}{3}} c t_1^{-n_2} t_2^{n_1+n_2} c^4 \\ &= t_1^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} t_2^{\frac{n_2-n_1}{3}} t_2^{-n_2} (t_1^{-1} t_2)^{n_1+n_2} c^5 \\ &= t_1^{-\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} c^5 \\ &= w_5 \end{aligned}$$

Ainsi, avec tout ce qui précède, si  $u \in H_5.c^2$ , alors, si  $3/(n_1 - n_2)$ , alors

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w_1 \rangle = \langle t_1^{\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} t_2^{\frac{n_2-n_1}{3}} c \rangle$$

et sinon,  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_5.c^3$ , alors  $u$  s'écrit  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_5$  et que  $u$  commute avec un élément  $w_1$  de  $H_5.c$ , lorsque  $w_1^3 = u$ . Dans quels cas  $u$  admet-il une racine cubique?

Supposons que  $w_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$ , soit une racine cubique de  $u$ . Alors,

$$\begin{aligned} (w_1)^3 &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_2^{p_1} (t_1^{-1} t_2)^{p_2} c^2 \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1-p_2} t_2^{p_1+2p_2} c^2 \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_2^{p_1-p_2} (t_1^{-1} t_2)^{p_1+2p_2} c^3 \\ &= t_1^{-2p_2} t_2^{2(p_1+p_2)} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  admet une racine cubique lorsque le système suivant admet des solutions entières  $p_1, p_2$  :

$$\begin{cases} n_1 = -2p_2 \\ n_2 = 2(p_1 + p_2) \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \frac{n_1+n_2}{2} \\ p_2 = -\frac{n_1}{2} \end{cases}$$

c'est à dire lorsque  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs, et dans ce cas  $u$  admet pour racine cubique  $w_1$ , avec :

$$w_1 = t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c$$

Nous avons vu aussi, que  $u$  commute avec un élément  $w_2 \in H_5.c^2$  lorsque  $u$  admet une racine cubique  $w_1$ , et qu'alors,  $w_2 = w_1^2$ . En outre,

$$\begin{aligned} u.v_3 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c^6 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} \end{aligned}$$

$$v_3.u = t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2}$$

ainsi,  $u$  et  $v_3$  commutent lorsque  $m_1 = n_1$  et  $m_2 = n_2$ , c'est à dire lorsque  $v_3 = u$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_4 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c^7 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_2^{-n_1} (t_1 t_2^{-1})^{n_2} c^7 \\ &= t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1-n_2} c \end{aligned}$$

Les éléments  $u$  et  $v_4$  commutent lorsque le système suivant admet des solutions entières  $m_1, m_2$ ,

$$\begin{cases} n_1 - m_1 = m_1 + n_2 \\ n_2 - m_2 = m_2 - n_1 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = \frac{n_1-n_2}{2} \\ m_2 = \frac{n_1+2n_2}{2} \end{cases}$$

c'est à dire lorsque  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs, et dans ce cas  $u$  commute avec  $w_4$  où

$$w_4 = t_1^{\frac{n_1-n_2}{2}} t_2^{\frac{n_1+2n_2}{2}} c^4$$

Or, si  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs, alors  $u$  admet pour racine cubique  $w_1$ , et on vérifie,

$$\begin{aligned} (w_1)^4 &= w_1 u \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_2} c^4 \\ &= t_1^{\frac{n_1-n_2}{2}} t_2^{\frac{n_1}{2}+n_2} c^4 \\ &= w_4 \end{aligned}$$

Et pour finir,

$$\begin{aligned} u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c^8 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_5.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1 t_2^{-1})^{n_1} t_1^{n_2} c^8 \\ &= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c^2 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  et  $v_5$  commutent lorsque le système suivant admet des solutions entières  $m_1, m_2$ ,

$$\begin{cases} n_1 - m_1 = m_1 + n_1 + n_2 \\ n_2 - m_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = \frac{-n_2}{2} \\ m_2 = \frac{n_1+n_2}{2} \end{cases}$$

c'est à dire, lorsque  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs, et dans ce cas  $u$  commute avec  $w_5$ ,

$$w_5 = t_1^{\frac{-n_2}{2}} t_2^{\frac{n_1+n_2}{2}} c^5$$

Or, lorsque  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs, nous avons vu que  $u$  admet  $w_1$  comme racine cubique. Or,

$$\begin{aligned} (w_1)^5 &= (w_1)^2 u \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} t_2^{\frac{n_1+n_2}{2}} (t_1^{-1} t_2)^{-\frac{n_1}{2}} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1+\frac{n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} c^2 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^3 \\ &= t_1^{n_1+\frac{n_2}{2}} t_2^{\frac{n_2-n_1}{2}} (t_1^{-1} t_2)^{n_1} t_1^{-n_2} c^5 \\ &= t_1^{-\frac{n_2}{2}} t_2^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)} c^5 \\ &= w_5 \end{aligned}$$

Ainsi, avec tout ce qui précède, si  $u \in H_5.c^3$ , alors si  $n_1$  et  $n_2$  sont pairs,

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w_1 \rangle = \langle t_1^{\frac{n_1+n_2}{2}} t_2^{-\frac{n_1}{2}} c \rangle$$

et sinon,  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_5.c^4$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4$ . Nous avons vu précédemment, que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_5$ ; que  $u$  commute avec un élément  $v_1 \in H_5.c$  ssi  $u$  admet une racine d'ordre 4  $w_1 \in H_5.c$ , et  $w_1 = v_1$ ; que  $u$  commute avec un élément  $v_2 \in H_5.c^2$  ssi  $u$  admet une racine d'ordre 2  $w_2 \in H_5.c$ , et  $w_2 = v_2$ ; et que  $u$  commute avec un élément  $v_3 \in H_5.c^3$  ssi  $u$  admet une racine d'ordre 4  $w_1 \in H_5.c$ , et  $(w_1)^3 = v_3$ . A quelles conditions  $u$  admet-il une racine d'ordre 2, d'ordre 4?

Notons  $w_2 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c^2$ , et supposons que  $(w_2)^2 = u$ . Alors,

$$\begin{aligned} (w_2)^2 &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c^2 t_1^{p_1} t_2^{p_2} c^2 \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} (t_1^{-1} t_2)^{p_1} t_1^{-p_2} c^4 \\ &= t_1^{-p_2} t_2^{p_1+p_2} c^4 \end{aligned}$$

ainsi,  $w_2^2 = u$  ssi le système suivant admet des solutions entières  $p_1, p_2$ ,

$$\begin{cases} -p_2 = n_1 \\ p_1 + p_2 = n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = n_1 + n_2 \\ p_2 = -n_1 \end{cases}$$

et donc tout élément de  $H_5.c^4$  admet une racine carrée;  $u$  admet pour racine carrée  $w_2 = t_1^{n_1+n_2} t_2^{-n_1} c^2$ .

Notons  $w_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$ , et supposons que  $(w_1)^4 = u$ . Dans ce cas, on a  $(w_1)^2 = w_2$ . Ainsi, on a,

$$\begin{aligned} (w_1)^2 &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} c t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\ &= t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_2^{p_1} (t_1^{-1} t_2) p_2 c^2 \\ &= t_1^{p_1-p_2} t_2^{p_1+2p_2} c^2 \end{aligned}$$

et donc,  $(w_1)^4 = u$  ssi le système suivant admet des solutions entières  $p_1, p_2$ ,

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = n_1 + n_2 \\ p_1 + 2p_2 = -n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \frac{1}{3}(n_1 + 2n_2) \\ p_2 = -\frac{1}{3}(2n_1 + n_2) \end{cases}$$

ce qui n'est le cas que lorsque  $3/(n_1 + 2n_2)$  et  $3/(2n_1 + n_2)$ , ce qui équivalent à la condition  $3/(n_1 - n_2)$ . Dans ce cas,  $u$  admet pour racine d'ordre 4,  $w_1$  avec

$$w_1 = t_1^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{-\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} c$$

On vérifie,

$$\begin{aligned} u.v_4 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^4 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{-m_1} (t_1 t_2^{-1})^{m_2} c^8 \\ &= t_1^{n_1+m_2} t_2^{n_2-m_1-m_2} c^2 \end{aligned}$$

$$v_4.u = t_1^{m_1+n_2} t_2^{m_2-n_1-n_2} c^2$$

$$u.v_4 = v_4.u \iff \begin{cases} n_1 + m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 - m_1 - m_2 = m_2 - n_1 - n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$$

et donc,  $u$  commute avec  $v_4$  ssi  $v_4 = u$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_2^{-m_1} (t_1 t_2^{-1})^{m_2} c^9 \\ &= t_1^{n_1+m_2} t_2^{n_2-m_1-m_2} c^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
v_5.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4 \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} (t_1 t_2^{-1})^{-n_1} t_1^{n_2} c^9 \\
&= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c^3
\end{aligned}$$

$$u.v_5 = v_5.u \iff \begin{cases} n_1 + m_2 = m_1 + n_1 + n_2 \\ n_2 - m_1 - m_2 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = \frac{1}{3}(n_1 - n_2) \\ m_2 = \frac{1}{3}(n_1 + 2n_2) \end{cases}$$

ce qui ne peut-être le cas que lorsque  $3/(n_1 - n_2)$ . Dans ce cas,  $u$  commute avec  $w_5$ , où

$$w_5 = t_1^{\frac{1}{3}(n_1-n_2)} t_2^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} c$$

Or,  $u$  admet une racine d'ordre 4,  $w_1$ , et

$$\begin{aligned}
(w_1)^5 &= w_1 u \\
&= t_1^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{-\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^4 \\
&= t_1^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{-\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{n_1} (t_1^{-1} t_2)^{n_2} c^5 \\
&= t_1^{\frac{1}{3}(n_1-n_2)} t_2^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} c^5 \\
&= w_5
\end{aligned}$$

Ainsi, en résumant tout ce qui précède, si  $u \in H_5.c^4$ , alors, si  $3/(n_1 - n_2)$  on a,

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w_1 \rangle = \langle t_1^{\frac{1}{3}(n_1+2n_2)} t_2^{-\frac{1}{3}(2n_1+n_2)} c \rangle$$

et sinon,

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w_2 \rangle = \langle t_1^{n_1+n_2} t_2^{-n_1} c^2 \rangle$$

Si  $u \in H_5.c^5$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^5$ . Avec tout ce qui précède,  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $H_5$ , et  $u$  commute avec un élément de  $H_5.c, H_5.c^2, H_5.c^3$ , ou  $H_5.c^4$  seulement lorsque  $u$  admet une racine d'ordre 5  $w_1 \in H_5.c$ , et dans ce cas  $u$  commute seulement avec les puissances de  $w_1$ . Dans quels cas,  $u$  admet-il une racine d'ordre 5?

supposons que  $w_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} c$  soit racine d'ordre 5 de  $u$ . alors,

$$\begin{aligned}
(t_1^{p_1} t_2^{p_2} c)^5 &= t_1^{p_1-5p_2} t_2^{p_1+2p_2} c^2 t_1^{p_1-5p_2} t_2^{p_1+2p_2} c^2 t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\
&= t_1^{p_1-5p_2} t_2^{p_1+2p_2} (t_1^{-1} t_2)^{p_1-5p_2} (t_1^{-1})^{p_1+2p_2} c^4 t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\
&= t_1^{-(p_1+2p_2)} t_2^{2p_1+p_2} c^4 t_1^{p_1} t_2^{p_2} c \\
&= t_1^{-(p_1+2p_2)} t_2^{2p_1+p_2} t_2^{-p_1} (t_1 t_2^{-1})^{p_2} c^5 \\
&= t_1^{-(p_1+p_2)} t_2^{p_1} c^5 \\
&= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^5
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} n_1 = -(p_1 + p_2) \\ n_2 = p_1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = n_2 \\ p_2 = -(n_1 + n_2) \end{cases}$$

Ainsi tout élément de  $H_5.c^5$  admet une racine d'ordre 5. Pour  $u$ , sa racine est  $w_1 = t_1^{n_2} t_2^{-(n_1+n_2)}$ .

Finalement,

$$\begin{aligned}
u.v_5 &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c^5 t_1^{m_1} t_2^{m_2} c^5 \\
&= t_1^{n_1} t_2^{n_2} (t_1 t_2^{-1})^{m_1} t_1^{m_2} c^{10} \\
&= t_1^{n_1+m_1+m_2} t_2^{n_2-m_1} c^4 \\
v_5.u &= t_1^{m_1+n_1+n_2} t_2^{m_2-n_1} c^4 \\
u.v_5 = v_5.u &\iff \begin{cases} n_1 + m_1 + m_2 = m_1 + n_1 + n_2 \\ n_2 - m_1 = m_2 - n_1 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi, si  $u \in H_5.c^5$ , alors

$$\mathcal{Z}(u) = \langle w_1 \rangle = \langle t_1^{n_2} t_2^{-(n_1+n_2)} c \rangle$$

□

**Pour  $G_6$ .** Notons  $K_6$  le sous-groupe de  $G_6$  engendré par  $\underline{a}, t_1$  et  $t_2$ . Avec les relations fournies par le lemme 5.5.1, il existe un morphisme naturel  $\varphi$  du groupe de la bouteille de Klein  $G_1$  sur  $K_6$ . L'élément  $c \in G_6$  est d'ordre 2, et agit par conjugaison sur  $K_6$ , par un automorphisme périodique de période 2. Il est alors clair que  $\varphi$  est un isomorphisme, et que  $G_6$  se décompose en un produit semi-direct de  $K_6$  par  $\langle c \rangle$ . Puisque l'on a une écriture sous forme normale d'un élément de  $K_6$ , on obtient l'existence et l'unicité de l'écriture d'un élément  $u \in G_6$ , sous une des formes décrites par le lemme. Notons  $v_a = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} \in H_6.\underline{a}$ ,  $v_c = t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \in H_6.c$ , et  $v_{ac} = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c \in H_6.\underline{a}c$ . Remarquons, que si  $u \in K_6$ , nous connaissons déjà, (voir le cas de  $G_1$ ), le centralisateur de  $u$  dans  $K_6$ , c'est à dire  $\mathcal{Z}(u) \cap K_6$ .

Si  $u \in H_6$ ,  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2}$ . Son centralisateur dans  $K_6$ ,  $\mathcal{Z}(u) \cap K_6$ , est soit  $K_6$  si  $u \in \langle t_1 \rangle$ , soit  $H_6$  sinon. De plus,

$$u.v_c = t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} c$$

$$\begin{aligned}
v_c.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c \\
&= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} c
\end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  et  $v_c$  commutent ssi  $n_1 = n_2 = 0$ . Puisque  $u$  est non trivial,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_6.c$ . On a aussi,

$$u.v_{ac} = t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2+m_2} \underline{a}c$$

$$\begin{aligned}
v_{ac}.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c \\
&= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{n_2} \underline{a} c \\
&= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2} \underline{a} c
\end{aligned}$$

et donc  $u$  et  $v_{ac}$  commutent ssi  $n_1 = 0$ . Donc, avec tout ce qui précède, si  $n_1 = 0$ , i.e,  $u \in \langle t_2 \rangle$ , alors  $\mathcal{Z}(u)$  est le plus petit groupe contenant  $H_6$  et  $H_6.\underline{ac}$ , c'est le sous-groupe de  $G_6$  engendré par  $t_1, t_2$ , et  $\underline{ac}$ . Remarquons que,

$$\begin{aligned} (\underline{ac})^2 &= \underline{acac} \\ &= \underline{acac}^{-1} \\ &= \underline{at_2a}^{-1} \\ &= t_2^{-1} \\ \underline{act_1}(\underline{ac})^{-1} &= \underline{at_1^{-1}a}^{-1} = t_1^{-1} \\ \underline{act_2}(\underline{ac})^{-1} &= \underline{at_2^{-1}a}^{-1} = t_2 \end{aligned}$$

Il est isomorphe au groupe de la bouteille de Klein.

Si  $u \in H_6$ , et  $u \notin \langle t_2 \rangle$ , alors si  $u \in \langle t_1 \rangle$ ,  $\mathcal{Z}(u) = K_6$ , et si  $u \notin \langle t_1 \rangle$ ,  $\mathcal{Z}(u) = H_6$ .

Si  $u \in H_6.\underline{a}$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{a}$ . Le centralisateur de  $u$  dans  $K_6$  est (voir le cas de  $G_1$ ),

$$\mathcal{Z}(u) \cap K_6 = \langle t_2^{n_2}\underline{a} \rangle$$

On vérifie,

$$\begin{aligned} u.v_a &= t_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{at_1^{m_1}t_2^{m_2}a} \\ &= t_1^{n_1+m_1}t_2^{n_2-m_2}\underline{a}^2 \\ &= t_1^{n_1+m_1+1}t_2^{n_2-m_2} \\ v_a.u &= t_1^{m_1+n_1+1}t_2^{m_2-n_2} \end{aligned}$$

Ainsi  $u$  et  $v_a$  commute ssi  $m_2 = n_2$ . Dans ce cas,  $v_a \in u.\langle t_1 \rangle$ . Puisque  $(t_2^{n_2}\underline{a})^2 = t_1$ , si  $v_a$  commute avec  $u$ , alors  $v_a \in \langle t_2^{n_2}\underline{a} \rangle$ .

On a,

$$\begin{aligned} u.v_c &= t_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{at_1^{m_1}t_2^{m_2}c} \\ &= t_1^{n_1+m_1}t_2^{n_2-m_2}\underline{ac} \\ v_c.u &= t_1^{m_1}t_2^{m_2}ct_1^{n_1}t_2^{n_2}\underline{a} \\ &= t_1^{m_1-n_1}t_2^{m_2-n_2}c\underline{a} \\ &= t_1^{m_1-n_1}t_2^{m_2-n_2}t_2\underline{a}^{-1}c \\ &= t_1^{m_1-n_1}t_2^{m_2-n_2}t_2t_1^{-1}\underline{ac} \\ &= t_1^{m_1-n_1-1}t_2^{m_2-n_2+1}\underline{ac} \end{aligned}$$

$$u.v_c = v_c.u \iff \begin{cases} n_1 + m_1 = m_1 - n_1 - 1 \\ n_2 - m_2 = m_2 - n_2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2n_1 = -1 \\ 2(m_2 + n_2) = 1 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions entières. On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_{ac} &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a} t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{m_1} t_2^{-m_2} \underline{a}^2 c \\ &= t_1^{n_1+m_1} t_2^{n_2-m_2} t_1 c \\ &= t_1^{n_1+m_1+1} t_2^{n_2-m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{ac}.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c \underline{a} \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{n_2} \underline{a} c \underline{a} \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2} \underline{a} t_2 \underline{a}^{-1} c \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2} t_2^{-1} c \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2-1} c \end{aligned}$$

$$u.v_{ac} = v_{ac}.u \iff \begin{cases} n_1 + m_1 + 1 = m_1 - n_1 \\ n_2 - m_2 = m_2 + n_2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2n_1 = -1 \\ 2m_2 = 1 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions entières. Ainsi  $u$  n'est pas conjugué à un élément de  $H_6.\underline{a}c$ . Avec tout ce qui précède, si  $u \in H_6.\underline{a}$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle t_2^{n_2} \underline{a} \rangle$ .

Si  $u \in H_6.c$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} c$ . Nous avons vu que  $u$  ne commute pas avec un élément non trivial de  $K_6$ . De plus,

$$\begin{aligned} u.v_c &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} c \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} \\ v_c.u &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2-n_2} \end{aligned}$$

et donc,  $u$  et  $v_c$  commutent seulement si  $u = v_c$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} u.v_{ac} &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{-m_2} c \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} t_2 \underline{a}^{-1} c^2 \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2-m_2} t_2 t_1^{-1} \underline{a} \\ &= t_1^{n_1-m_1-1} t_2^{n_2-m_2+1} \underline{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{ac}.u &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c t_1^{n_1} t_2^{n_2} c \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} c^2 \\ &= t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_1^{-n_1} t_2^{n_2} \underline{a} \\ &= t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2} \underline{a} \end{aligned}$$

$$u.v_{ac} = v_{ac}.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 - 1 = m_1 - n_1 \\ n_2 - m_2 + 1 = m_2 + n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(n_1 - m_1) = 1 \\ 2m_2 = 1 \end{cases}$$

ainsi,  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_6.\underline{a}c$ . En collectant ces résultats, on obtient que si  $u \in H_6.c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle u \rangle$ .

Si  $u \in H_6.\underline{a}c$ , alors  $u$  s'écrit  $u = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a}c$ . Nous avons vu précédemment que les seuls éléments de  $K_6$  qui commutent avec  $u$ , sont dans  $\langle t_2 \rangle$ , et que  $u$  ne commute pas avec un élément de  $H_6.c$ . En outre,

$$\begin{aligned} u.v_{ac} &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} \underline{a} c t_1^{m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{m_2} \underline{a} c \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{m_2} \underline{a} t_2 \underline{a}^{-1} c^2 \\ &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_1^{-m_1} t_2^{m_2} t_2^{-1} \\ &= t_1^{n_1-m_1} t_2^{n_2+m_2-1} \end{aligned}$$

$$v_{ac}.u = t_1^{m_1-n_1} t_2^{m_2+n_2-1}$$

$$u.v_{ac} = v_{ac}.u \iff \begin{cases} n_1 - m_1 = m_1 - n_1 \\ n_2 + m_2 - 1 = m_2 + n_2 - 1 \end{cases} \iff m_1 = n_1$$

Ainsi, dans le cas, où  $u$  et  $v_{ac}$  commutent, on a  $v_{ac} \in u. \langle t_2 \rangle$ . Avec tout ce qui précède, le centralisateur de  $u$  est le sous-groupe de  $G_6$  engendré par  $u$  et  $t_2$ . En particulier, il contient  $t_1^{n_1} \underline{a}c$ , et  $t_1^{n_1} \underline{a}c$  et  $t_2$  engendrent  $\mathcal{Z}(u)$ . Or,

$$\begin{aligned} (t_1^{n_1} \underline{a}c)^2 &= t_1^{n_1} \underline{a} c t_1^{n_1} \underline{a} c \\ &= t_1^{n_1} t_1^{-n_1} \underline{a} c \underline{a} c \\ &= \underline{a} t_2 \underline{a}^{-1} c^2 \\ &= t_2^{-1} \end{aligned}$$

et donc, si  $u \in H_6.\underline{a}c$ , alors  $\mathcal{Z}(u) = \langle t_1^{n_1} \underline{a}c \rangle$ . ■

## 5.6 Derniers algorithmes

Pour conclure avec le cas des fibrés de Seifert, il ne nous reste plus qu'à résoudre les algorithmes de détermination des éléments périphéraux, des classes périphérales, et de détermination des 2-cosets, dans le groupe d'un espace fibré de Seifert  $M$ , apparaissant comme pièce élémentaire dans une décomposition minimale non triviale, d'une variété Haken. Dans ce cas,  $M$  n'est homéomorphe ni à  $S^1 \times D^2$ , ni à  $S^1 \times S^1 \times I$ . De plus,  $M$  est à bord non vide. Or, comme nous avons pu le constater tout au long de ce chapitre, les fibrés de Seifert à bord non vide sont considérablement plus simples à étudier, que ceux à bord vide. C'est la raison pour laquelle, la résolution de ces algorithmes ne présente aucune difficulté.

Dans la suite, nous supposons que  $M$  est un espace fibré de Seifert à bord non vide, qui n'est pas homéomorphe à  $S^1 \times D^2$ , ou à  $S^1 \times S^1 \times I$ . On suppose en outre que  $M$  est muni d'une fibration, et nous notons  $N$  la fibre, et  $\Pi$  le sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)$ .

**Proposition 5.6.1 (Détermination des éléments périphéraux)** *Soit  $T$  une composante périphérale de  $\pi_1(M)$ . Il existe un algorithme permettant de décider pour tout élément arbitraire  $u \in \pi_1(M)$ , si  $u \in T$ .*

**Démonstration** On se donne un élément quelconque  $t$  de  $T - N$ . Le centralisateur de  $t$  dans  $\pi_1(M)$  est  $T$  (corollaire 5.4.1). Pour décider si  $u \in T$ , il suffit de décider avec l'algorithme du mot (proposition 5.5.2) si  $utu^{-1}t^{-1} = 1$ . ■

**Proposition 5.6.2 (Détermination des classes périphérales)** *Soient  $T$  une composante périphérale de  $\pi_1(M)$ , et  $u$  un élément de  $\pi_1(M)$ .*

*L'ensemble des éléments de  $T$  conjugués à  $u$  est soit vide, soit un singleton, soit de la forme  $\{u, u^{-1}\}$  dans le cas où  $u \in N$  et où la base est non orientable. Il existe un algorithme qui permet de le déterminer.*

**Démonstration** Commençons par la première partie de l'assertion. Supposons que  $u$  soit conjugué à deux éléments de  $t, t' \in T$ , alors  $t, t'$  sont conjugués et la proposition 5.4.2 permet de conclure.

Pour construire un algorithme on considère la présentation donné par le théorème 5.2.1. Supposons que  $T$  soit engendré par  $d_1, h$ , et que  $u$  soit conjugué à l'élément  $d_1^p h^q$  de  $T$ . Alors dans  $\pi_1(M)/N$ ,  $\underline{u}$  est conjugué à  $\underline{d}_1^p$ . Puisque  $M$  n'est pas homéomorphe à  $S^1 \times D^2$ ,  $\underline{d}_1$  est sans torsion dans  $\pi_1(M)/N$ .

On considère l'élément  $\underline{u} \in \pi_1(M)/N$ . Puisque  $M$  est à bord non vide,  $\pi_1(M)/N$  est un produit libre de groupes cycliques. L'algorithme consiste d'abord à décider dans  $\pi_1(M)/N$  si  $\underline{u}$  est conjugué à un élément de  $\langle \underline{d}_1 \rangle$ , et le cas échéant, à déterminer un élément  $\underline{a} \in \pi_1(M)/N$  qui le conjugue. Si  $\underline{u}$  n'est pas conjugué à un élément de  $\langle \underline{d}_1 \rangle$ , alors  $u$  n'est pas conjugué à un élément de  $T$ , dans  $\pi_1(M)$ .

Si pour un certain  $\underline{a} \in \pi_1(M)$ ,

$$\underline{u} = \underline{a} \underline{d}_i^p \underline{a}^{-1} \quad \text{dans } \pi_1(M)/N$$

alors pour  $a \in r^{-1}(\underline{a})$ ,

$$u = ad_i^p a^{-1} h^q = ad_i^p h^{\varepsilon q} a^{-1} \quad \text{dans } \pi_1(M)$$

pour un certain  $q \in \mathbb{Z}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , selon si  $a \in \Pi$  ou non. L'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$  (proposition 5.5.2), nous permet de déterminer cet entier  $q$ , et donc l'élément  $d_i^p h^{\varepsilon q} \in T$  auquel  $u$  est conjugué. Si  $p \neq 0$ , ou si la base  $B$  de la fibration de  $M$  est orientable, c'est l'unique élément de  $T$  conjugué à  $u$ . Si  $p = 0$ , et si la base  $B$  est non orientable, alors  $u$  est conjugué à deux éléments de  $T$ ,  $h^q$  et  $h^{-q}$ . ■

**Proposition 5.6.3 (Détermination des doubles-cosets I)** *Soient  $T$  une composante périphérale de  $\pi_1(M)$ , et  $u, v$  des éléments de  $\pi_1(M)$ , avec  $v \notin T$ .*

*L'ensemble des couples  $(t_1, t_2) \in T \times T$ , tels que  $u = t_1 v t_2$  est soit vide, soit d'une des formes suivantes:*

$$(i) \{(\mu_1 \cdot h^n, h^{-n} \cdot \mu_2) \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ pour } \mu_1, \mu_2 \in T, \text{ si } v \in \Pi$$

$$(ii) \{(\mu_1 \cdot h^n, h^n \cdot \mu_2) \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ pour } \mu_1, \mu_2 \in T, \text{ si } v \notin \Pi$$

*Il existe un algorithme qui permet de le déterminer.*

**Démonstration** Nous commençons par démontrer la première partie de l'énoncé. Supposons que pour  $\mu_1, \mu_2, \mu'_1, \mu'_2 \in T$ , dans  $\pi_1(M)$

$$u = \mu_1 v \mu_2$$

$$u = \mu'_1 v \mu'_2$$

alors,

$$v^{-1}(\mu_1^{-1} \mu'_1) v = \mu_2 \mu'_2{}^{-1}$$

et avec la proposition 5.4.2

$$\mu'_1 = \mu_1 \cdot h^n \quad \text{et} \quad \mu'_2 = h^{-\varepsilon n} \mu_2$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $\varepsilon = 1$  si  $v \in \Pi$ ,  $\varepsilon = -1$  sinon.

Réciproquement, si  $u = \mu_1 v \mu_2$ , alors

$$\mu_1 h^n v h^{-\varepsilon n} \mu_2 = \mu_1 h^n h^{\varepsilon(-\varepsilon n)} v \mu_2 = \mu_1 h^n h^{-n} v \mu_2 = \mu_1 v \mu_2 = u$$

Ceci démontre la première partie de l'énoncé.

On veut construire un algorithme qui permette de déterminer, s'il existe, un couple  $(\mu_1, \mu_2) \in T \times T$  tel que  $u = \mu_1 v \mu_2$ . Par définition du sous-groupe canonique  $\Pi$ , on peut alors décider si  $v \in \Pi$ , et ainsi déterminer l'ensemble de tels couples.

On suppose que pour la présentation canonique donnée par le théorème 5.2.1,  $T$  est engendré par  $d_1, h$ . Si  $u = \mu_1 v \mu_2$  pour  $\mu_1 = d_1^n h^p, \mu_2 = d_1^m h^q$ , alors dans  $\pi_1(M)/N$ ,

$$\underline{u} = \underline{d}_1^m \underline{v} \underline{d}_1^m$$

Or puisque  $M$  n'est pas homéomorphe à  $S^1 \times D^2$ ,  $\underline{d}_1$  est sans torsion. De plus, aucune puissance de  $\underline{v}$  n'est dans le groupe engendré par  $\underline{d}_1$ . En effet,  $\underline{d}_1$  n'a pas

de racine non triviale, et  $v \notin T$ . Ainsi, puisque  $\pi_1(M)/N$  se décompose en produits libres de groupes cycliques, on peut décider dans  $\pi_1(M)/N$  si un tel couple  $(n,m)$  existe, le cas échéant il est unique, et l'on peut le déterminer.

Si on a déterminé un tel couple  $(n,m)$ , alors, dans  $\pi_1(M)$ ,

$$u = d_1^n v d_1^m h^r$$

pour un certain  $r \in \mathbb{Z}$ , et donc  $(\mu_1, \mu_2)$  existe, avec  $\mu_1 = d_1^n$ ,  $\mu_2 = d_1^m h^r$ . Il suffit alors d'utiliser l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M)$  pour déterminer  $r$ , et ainsi tous les couples  $(t_1, t_2)$  vérifiant  $u = t_1 v t_2$ . ■

**Proposition 5.6.4 (Détermination des doubles-cosets II)** *Soient  $T_1, T_2$  des composantes périphérales différentes de  $\pi_1(M)$ , et  $u, v$  des éléments de  $\pi_1(M)$ .*

*L'ensemble des couples  $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ , tels que  $u = t_1 v t_2$  est soit vide, soit d'une des formes suivantes:*

- (i)  $\{(\mu_1 \cdot h^n, h^{-n} \cdot \mu_2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  pour  $\mu_1 \in T_1, \mu_2 \in T_2$ , si  $v \in \Pi$
- (ii)  $\{(\mu_1 \cdot h^n, h^n \cdot \mu_2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  pour  $\mu_1 \in T_1, \mu_2 \in T_2$ , si  $v \notin \Pi$

*Il existe un algorithme qui permet de le déterminer.*

**Démonstration** La démonstration de la première partie de la proposition 5.6.3 reste valable pour ce cas. Quant à l'algorithme nous le traitons de façon analogue.

Supposons que  $T_1$  soit engendré par  $(d_1, h)$  et  $T_2$  par  $(d_2, h)$ . Alors puisque  $M$  n'est pas  $S^1 \times D_2$  ou  $S^1 \times S^1 \times I$ ,  $\underline{d}_1, \underline{d}_2$  sont sans torsion, et aucune puissance de l'un n'est conjugué à une puissance de l'autre. Alors, on peut déterminer dans  $\pi_1(M)/N$ , s'il existe, un unique couple  $(n, m)$  tel que

$$\underline{u} = \underline{d}_1^n \underline{v} \underline{d}_2^m$$

Le reste de la démonstration est identique à celle de la proposition 5.6.3. ■



# Chapitre 6

## Circuits et groupe d'une variété Haken

Nous poursuivons l'étude faite dans le §3.2.5, en généralisant la notion de graphe de groupe sans circuit, en graphe de groupe presque sans circuit. L'intérêt provient du fait que cette notion recouvre le cas du graphe de groupe associé à la décomposition minimale d'une variété Haken  $\partial$ -irréductible à bord torique ou vide (ce résultat reste en fait vrai, même lorsque le bord est non torique). Cela nous permettra de caractériser le centralisateur d'un élément dans le groupe d'une telle 3-variété (théorème 6.2.1), ce qui nous sera utile dans le chapitre suivant, pour résoudre le problème du mot généralisé dans le groupe d'une variété Haken.

Pour en arriver à ces résultats, nous classifions les trajets et les circuits dans le graphe de groupe associé à la décomposition minimale d'une telle variété (proposition 6.2.1). Ce résultat, qui montre qu'il y a «très peu» de trajets et de circuits possibles, sera lui aussi essentiel pour la résolution des algorithmes du prochain chapitre.

### 6.1 Graphe de groupe presque sans circuit

Cette section constitue la suite de la section §3.2.5. Aussi nous conseillons au lecteur d'avoir préalablement pris connaissance de cette dernière section, et plus généralement de tout le chapitre 3.

#### 6.1.1 Définitions

**Définition VI.1.** Un circuit non trivial est dit **cycliquement réduit**, lorsqu'il est réduit (cf. définition III.10), et n'est pas de la forme suivante :

$$u \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{-a} c_2 \underset{h_2}{\circlearrowright} u$$

avec  $h_2 h_1 \in G_a^-$

Considérons un circuit réduit non cycliquement réduit  $\mathcal{C}$ , que l'on note :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a} c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\gamma} c_{n-1}^+ \underset{h_{n-1}}{\circlearrowleft} c_n^- \xrightarrow{-a} c_n^+ \underset{h_n}{\circlearrowleft} u$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathcal{C}_1}$

avec  $h_n h_0 \in G_a^-$  ; et  $\mathcal{C}_1$  le sous-trajet comme désigné ci dessus. Sous ces conditions,

$$\begin{aligned} c_{n-1}^+ &= h_{n-1} c_n^- h_{n-1}^{-1} \\ &= h_{n-1} t_{-a} c_n^+ t_{-a}^{-1} h_{n-1}^{-1} \\ &= h_{n-1} t_{-a} h_n u h_n^{-1} t_{-a}^{-1} h_{n-1}^{-1} \\ &= h_{n-1} t_{-a} h_n h_0 c_1^- h_0^{-1} h_n^{-1} t_{-a}^{-1} h_{n-1}^{-1} \\ &= h_{n-1} t_{-a} h_n h_0 t_a c_1^+ t_a^{-1} h_0^{-1} h_n^{-1} t_{-a}^{-1} h_{n-1}^{-1} \\ &= h_{n-1} t_a^{-1} h_n h_0 t_a c_1^+ t_a^{-1} h_0^{-1} h_n^{-1} t_a h_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

et puisque  $h_n h_0 \in G_a^-$ ,

$$c_{n-1}^+ = h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0) c_1^+ (h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0))^{-1}$$

avec  $h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0) \in G_{e(a)}$ , puisque  $h_{n-1} \in G_{e(a)}$  et  $\varphi_a(h_n h_0) \in G_a^+ \subset G_{e(a)}$ . Ainsi, on peut construire le circuit en  $c_1^+$  suivant  $\mathcal{C}'$  :

$$c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\gamma} c_{n-1}^+ \underset{h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0)}{\circlearrowleft} c_1^+$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathcal{C}_1}$

Puisque  $\mathcal{C}_1$  est réduit,  $\mathcal{C}'$  est aussi réduit. Une telle opération est appelée une **réduction cyclique** de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}'$ . Le label de  $\mathcal{C}'$  est le conjugué cyclique du label de  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \text{label}(\mathcal{C}') &= (h_0 t_a)^{-1} \cdot \text{label}(\mathcal{C}) \cdot h_0 t_a \\ &= (h_0 t_a)^{-1} \cdot h_0 t_a h_1 \cdots h_{n-1} t_{-a} h_n \cdot h_0 t_a \\ &= h_1 \cdots h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0) \end{aligned}$$

Si  $l$  est la longueur du chemin sous-jacent à  $\mathcal{C}$ , le chemin sous-jacent à  $\mathcal{C}'$  est de longueur  $l - 2$ . Dans la suite nous parlerons de longueur du trajet au lieu de longueur du chemin sous-jacent à ce trajet.

On peut construire le circuit suivant en  $u$ , ayant même label que  $\mathcal{C}$ , et même longueur  $l$ .

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a} c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\gamma} c_{n-1}^+ \underset{h_{n-1} \varphi_a(h_n h_0)}{\circlearrowleft} c_1^+ \xrightarrow{-a} c_1^- \underset{h_0^{-1}}{\circlearrowleft} u$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathcal{C}'}$

Il est important de remarquer qu'il est réduit. En effet, dans le cas contraire, on aurait nécessairement  $h_{n-1} \in G_a^+$  et  $\gamma = a$ , ce qui contredirait le fait que  $\mathcal{C}$  soit réduit. Il n'est cependant clairement pas cycliquement réduit.

Si le circuit  $\mathcal{C}'$  n'est pas réduit, on lui applique une réduction cyclique, pour obtenir un nouveau circuit réduit de longueur strictement inférieure. Par applications

successives de réductions cycliques, on obtient un circuit cycliquement réduit  $\mathcal{C}''$ , en  $c_i^+$ . Si l'on note  $\mathcal{T}$  le sous-trajet de  $\mathcal{C}$ , de  $u$  à  $c_i^+$  suivant :

$$u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a} c_1^+ \underset{h_1}{\circlearrowleft} c_2^- \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_{i-1}^+ \underset{h_{i-1}}{\circlearrowleft} c_i^- \xrightarrow{a_i} c_i^+ = c_i^+$$

on peut construire le circuit réduit en  $u$ ,  $\mathcal{T}\mathcal{C}''\mathcal{T}^{-1}$ , ayant même label (et même longueur) que  $\mathcal{C}$  :

$$\underbrace{u \underset{h_0}{\circlearrowleft} c_1^- \xrightarrow{a} \cdots c_{i-1}^+ \underset{h_{i-1}}{\circlearrowleft} c_i^- \xrightarrow{a_i} c_i^+}_{\mathcal{T}} \underbrace{\underset{h_i}{\circlearrowleft} \cdots \underset{h_i}{\circlearrowleft} c_i^+}_{\mathcal{C}''} \underbrace{\xrightarrow{-a_i} c_i^- \underset{h_{i-1}^{-1}}{\circlearrowleft} c_{i-1}^+ \cdots \xrightarrow{-a} c_1^- \underset{h_0^{-1}}{\circlearrowleft} u}_{\mathcal{T}^{-1}}$$

Le label de  $\mathcal{C}''$  est le conjugué cyclique du label de  $\mathcal{C}$ , donné par

$$\text{label}(\mathcal{C}'') = \text{label}(\mathcal{T})\text{label}(\mathcal{C})\text{label}(\mathcal{T}^{-1})$$

Ainsi, pour tout élément  $u$  d'un sous-groupe de sommet, et pour tout circuit réduit, non cycliquement réduit  $\mathcal{C}$  en  $u$ , il existe un circuit réduit en  $u$ , ayant même label que  $\mathcal{C}$ , qui s'écrit  $\mathcal{T}.\mathcal{D}.\mathcal{T}^{-1}$ , où  $\mathcal{T}$  est un sous-trajet initial de  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{D}$  est un circuit cycliquement réduit.

**Définition VI.2.** Un graphe de groupe décomposé est dit **presque sans circuit** si pour tout élément non trivial  $u$ , d'un sous-groupe de sommet, tout circuit cycliquement réduit en  $u$  est trivial.

### 6.1.2 Propriétés algébriques

Nous avons déjà remarqué que dans un graphe de groupe sans circuit le centralisateur d'un élément est particulièrement simple. Nous souhaitons généraliser ce résultat au cas d'un graphe de groupe presque sans circuit. Ce cas fait apparaître une difficulté : les résultats se généralisent bien, sauf dans le cas d'éléments de groupes de sommets, conjugués à certains éléments particuliers, les éléments dits exceptionnels.

Rappelons que si deux éléments  $u, v$  sont conjugués, leur centralisateur sont isomorphes, et l'on peut construire un isomorphisme en considérant la restriction d'un automorphisme intérieur envoyant  $u$  sur  $v$ .

**Définition VI.3.** Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe décomposé. Un élément  $u$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est appelé un **élément exceptionnel** si  $u$  est dans un sous-groupe d'arête  $G_a^+$  d'un sous-groupe de sommet  $G_s$ , et s'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G_a^-$ , avec  $u_0 = u$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un trajet réduit non trivial  $\mathcal{C}_n$  de  $u_n$  à  $u_{n+1}$ . En notant  $\gamma_n = \text{label}(\mathcal{C}_n)$ , on a  $u_n = \gamma_n u_{n+1} \gamma_n^{-1}$ .
- (ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $h_n \in G_s$ , tel que  $[h_n, u_n] = 1$ ,  $h_n \notin G_a^+$ , et  $\gamma_n^{-1} h_n \gamma_n \in G_a^+$ .

**Exemple 1 :** Considérons le groupe  $\Gamma$  de présentation :

$$\Gamma \cong \langle a_1, a_2, b_1, b_2, k, h \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_2, h] = 1, ka_1^2 k^{-1} = a_2, kb_1 k^{-1} = h \rangle$$

C'est une extension HNN de lettre stable  $k$  du groupe  $\Gamma_1$  de présentation :

$$\Gamma_1 \cong \langle a_1, a_2, b_1, b_2, h \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_2, h] = 1 \rangle$$

et l'abélianisé de  $\Gamma_1$  est libre abélien sur les générateurs  $a_1, a_2, b_1, b_2, h$ . Ainsi, premièrement  $\Gamma$  est non trivial, deuxièmement  $h \notin \langle a_2, b_2 \rangle_\Gamma$ . Les sous-groupes  $\langle a_1, b_1 \rangle_\Gamma$  et  $\langle a_2, b_2 \rangle_\Gamma$  de  $\Gamma$  sont libres abéliens de rang 2. Considérons l'isomorphisme  $\varphi : \langle a_1, b_1 \rangle_\Gamma \longrightarrow \langle a_2, b_2 \rangle_\Gamma$  défini par  $\varphi(a_1) = \varphi(a_2), \varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ . Construisons le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  ayant un sommet  $s$ , et une arête  $\alpha$ , tel que  $G_s = \Gamma$ ,  $G_\alpha^- = \langle a_1, b_1 \rangle_\Gamma$ ,  $G_\alpha^+ = \langle a_2, b_2 \rangle_\Gamma$ , et  $\varphi_\alpha = \varphi$ . Avec le théorème 2.2.3,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  admet pour présentation :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \pi_1(\mathcal{G}, X) \cong \langle a_1, a_2, b_1, b_2, k, h \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_2, h] = 1, \\ ka_1^2 k^{-1} = a_2, kb_1 k^{-1} = h, t_\alpha a_2 t_\alpha^{-1} = a_1, t_\alpha b_2 t_\alpha^{-1} = b_1 \rangle \end{aligned}$$

Montrons que l'élément  $a_2$  est un élément exceptionnel. Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , d'éléments de  $G_a^+$ , définie par  $u_n = a_2^{2^n}$ . La relation  $a_2^{2^n} = kt_\alpha a_2^{2^{n+1}} t_\alpha^{-1} k^{-1}$ , fournit pour tout  $n \geq 0$ , le trajet réduit :

$$u_n = a_2^{2^n} \underset{k}{\circlearrowleft} a_1^{2^{n+1}} \xrightarrow{\alpha} a_2^{2^{n+1}} = u_{n+1}$$

de label  $kt_\alpha$ . Pour tout  $n \geq 0$ ,  $[h, u_n] = 1$ , et  $(kt_\alpha)^{-1} h k t_\alpha = b_2 \in \langle a_2, b_2 \rangle_\Gamma$ . Ainsi  $u_2$  est un élément exceptionnel. Dans  $\Gamma$ , le centralisateur  $\mathcal{Z}_\Gamma(a_2)$  de  $a_2$  est engendré

par  $a_2, b_2, h$ . Dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , le centralisateur  $\mathcal{Z}_{\tilde{\Gamma}}(a_2)$  de  $a_2$  contient  $\mathcal{Z}_{\Gamma}(a_2)$  comme sous-groupe propre. Il contient aussi, par exemple, tous les mots (réduits) de la forme  $(kt_\alpha)^p h (kt_\alpha)^{-p}$ , pour  $p \geq 0$ , et ainsi,  $\mathcal{Z}_{\tilde{\Gamma}}(a_2)$  n'est pas dans un conjugué du groupe de sommet  $G_s = \Gamma$ . Remarquons que  $(\mathcal{G}, X)$  n'est pas presque sans circuit, puisque  $hb_2(kt_\alpha)^p h (kt_\alpha)^{-p} \in \mathcal{Z}_{\tilde{\Gamma}}(a_2)$  est le label d'un circuit en  $a_2$ , et est un mot cycliquement réduit de longueur supérieure à 1, au sens de la décomposition HNN de  $\tilde{\Gamma}$ .

**Exemple 2 :** Considérons le groupe  $G$ , produit libre de deux copies du groupe libre abélien de rang infini  $\mathbb{Z}^\infty$ . Alors  $G$  admet la présentation (infinie) suivante :

$$G \cong \langle a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots \mid \forall i \in \mathbb{N} \quad [a_0, a_i] = 1, \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_* \quad [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = 1 \rangle$$

Considérons les sous-groupes suivants de  $G$ , isomorphes à  $\mathbb{Z}^\infty$ ,

$$A_0 = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle_G \\ A_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle_G \\ B_1 = \langle b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \rangle_G$$

Considérons le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  défini de la façon suivante :  $X$  a un sommet  $s$  et deux arêtes  $\alpha, \beta$ , avec  $G_s = G$ ,  $G_\alpha^- = A_0$ ,  $G_\alpha^+ = B_1$ , et

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} G_\alpha^- & \longrightarrow & G_\alpha^+ \\ a_i & \longrightarrow & b_{i+1} \end{array}$$

et  $G_\beta^- = B_1$ ,  $G_\beta^+ = A_1$

$$\varphi_\beta : \begin{array}{ccc} G_\beta^- & \longrightarrow & G_\beta^+ \\ b_i & \longrightarrow & a_i \end{array}$$

Avec le théorème 2.2.3,  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$  admet pour présentation :

$$\tilde{\Gamma} \cong \langle t_\alpha, t_\beta, a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots \mid \forall i \in \mathbb{N} \quad [a_0, a_i] = 1, \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_* \quad [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = 1, \\ \forall i \in \mathbb{N}_*, \quad t_\alpha b_i t_\alpha^{-1} = a_{i-1}, t_\beta a_i t_\beta^{-1} = b_i \rangle$$

Montrons que  $a_1$  est un élément exceptionnel. Pour cela considérons la suite  $(u_n)_n$  de  $G_\beta^+$ , définie par  $\forall n \geq 1, u_n = a_n$ . Dans  $(\mathcal{G}, X)$ , on a pour tout  $n$  un trajet de  $u_n$  à  $u_{n+1}$ , de label  $t_\alpha t_\beta$  :

$$u_n = a_n \xrightarrow{\alpha} b_{n+1} = b_{n+1} \xrightarrow{\beta} a_{n+1} = u_{n+1}$$

De plus,  $a_0 \notin A_1$ ,  $[a_0, a_1] = 1$  dans  $G_s = G$ , et  $(t_\alpha t_\beta)^{-1} a_0 t_\alpha t_\beta = t_\beta^{-1} b_1 t_\beta = a_1 \in G_\beta^+$ . Ainsi  $a_1$  est un élément exceptionnel. Bien sûr  $\mathcal{Z}_G(a_1) = A_0$ , et on a :

$$\mathcal{Z}_\Gamma(a_1) = \bigcup_{p \geq 0} (t_\alpha t_\beta)^p A_0 (t_\alpha t_\beta)^{-p}$$

On peut remarquer que tous les  $a_i, b_j$  sont conjugués dans  $\Gamma$  à  $a_1$ , ce qui caractérise leur centralisateur. Il est facile de vérifier qu'en fait tout élément de  $A_1$  est un élément exceptionnel, et a même centralisateur que  $a_1$ . Mais un élément de  $G$  qui n'est pas dans  $A_0 \cup B_1$  n'est pas conjugué à un élément exceptionnel. Un tel élément a son centralisateur dans  $G$ , il est cyclique infini.

Il est facile de voir que  $(\mathcal{G}, X)$  est presque sans circuit. Les seuls circuits réduits ont pour label un élément de la forme  $(t_\alpha t_\beta)^p a (t_\alpha t_\beta)^{-p}$ , ou  $t_\beta (t_\alpha t_\beta)^p a (t_\alpha t_\beta)^{-p} t_\beta^{-1}$ , avec  $p \geq 0$  et  $a \in A_0 - A_1$ . Ainsi tout circuit cycliquement réduit est trivial.

**Problème :** Construire un exemple de graphe de groupe presque sans circuit, ayant un élément exceptionnel, dont les groupes de sommets sont finiment présentés, et (surtout !) les groupes d'arêtes de type fini (nous pensons que c'est possible). Peut-on trouver des conditions suffisantes «intéressantes» sur les groupes d'arêtes et de sommets, pour qu'un graphe de groupe presque sans circuit ne contienne pas d'élément exceptionnel?

Le résultat suivant, affirme que dans un graphe de groupe presque sans circuit, à l'exception du cas d'un élément conjugué à un élément exceptionnel, le centralisateur a une structure très simple.

**Théorème 6.1.1** *Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupe décomposé, presque sans circuit. Soient  $u$  un élément non trivial de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , et  $\mathcal{Z}(u)$  le centralisateur de  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Alors,*

- (i) *Si  $u$  est dans un sous-groupe d'arête, et  $h$  commute avec  $u$ , alors  $u$  et  $h$  sont dans un même conjugué d'un sous-groupe de sommet. De plus, soit  $u$  est conjugué à un élément exceptionnel, soit  $u$  est conjugué dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  à un élément  $v$  dans un sous-groupe d'arête  $G_a^-$  d'un sous-groupe de sommet  $G_{s'}$ , et  $\mathcal{Z}(v) \subset G_{s'}$ .*
- (ii) *Si  $u$  est dans un sous-groupe de sommet  $G_s$ , et n'est pas dans le conjugué dans  $G_s$  d'un sous-groupe d'arête de  $G_s$ , alors  $\mathcal{Z}(u)$  est le centralisateur de  $u$  dans  $G_s$ .*
- (iii) *Si  $u$  n'est pas dans le conjugué d'un sous-groupe de sommet, alors  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini.*

**Démonstration** Nous démontrons séparément les conclusions (i),(ii),(iii).

Cas (i) Fixons  $u \neq 1$  dans un sous-groupe d'arête de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Soit  $h$  un élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  qui commute avec  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Avec le théorème 3.2.1,  $h$  est le label d'un circuit réduit en  $u$ . Avec la définition VI.1, on peut alors construire un circuit en  $u$ ,  $\mathcal{C}$ , de label  $h$ , qui est soit cycliquement réduit, soit de la forme  $\mathcal{T}\mathcal{C}_1\mathcal{T}^{-1}$ , où  $\mathcal{T}$  est un trajet de  $u$  à  $u_1 \in G_\alpha^+$ , et  $\mathcal{C}_1$  est un circuit cycliquement réduit en  $u_1$ . Ainsi, puisque  $(\mathcal{G}, X)$  est presque sans circuit,  $\mathcal{C}$  est soit trivial, soit de la forme :

$$\underbrace{u \cdots}_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\alpha} u_1 \underbrace{\circlearrowleft_{h'}}_{\mathcal{C}_1} u_1 \xrightarrow{-\alpha} \cdots u \underbrace{\quad}_{\mathcal{T}^{-1}}$$

avec  $h' \notin G_\alpha^+$

et donc,  $u$  et  $h$  sont conjugués par  $\text{label}(\mathcal{T})$ , respectivement à  $u_1$  et  $h'$ , tous deux éléments d'un même sous-groupe de sommet. Ceci démontre la première conclusion de (i).

Pour achever la démonstration du cas (i), nous commençons par étudier la structure des circuits en un élément  $u \neq 1$ . Considérons deux circuits réduits, non cycliquement réduits, en  $u$ , que l'on peut supposer sous la forme (cf. définition VI.1)  $\mathcal{T}_1\mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}$ ,  $\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}$ , où  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  sont les trajets réduits suivants :

$$\mathcal{T}_1 : \quad u \underset{k_1}{\circlearrowleft} d_1^- \xrightarrow{a_1} d_1^+ \cdots \xrightarrow{a_i} d_i^+ \underset{k_{i+1}}{\circlearrowleft} d_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots d_n^- \xrightarrow{a_n} u_1 = u$$

$$\mathcal{T}_2 : \quad u \underset{l_1}{\circlearrowleft} e_1^- \xrightarrow{b_1} e_1^+ \cdots \xrightarrow{b_j} e_j^+ \underset{l_{j+1}}{\circlearrowleft} e_{j+1}^- \xrightarrow{b_{j+1}} \cdots e_m^- \xrightarrow{b_m} u_2 = u$$

et  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  sont les circuits cycliquement réduits en  $u_1, u_2 \neq 1$  (et donc triviaux),

$$\mathcal{C}_1 : \quad u_1 \underset{h_1}{\circlearrowleft} u_1 \quad \text{avec } h_1 \notin G_{a_n}^+$$

$$\mathcal{C}_2 : \quad u_2 \underset{h_2}{\circlearrowleft} u_2 \quad \text{avec } h_2 \notin G_{b_m}^+$$

En particulier, tout circuit réduit en  $u \neq 1$  est de longueur paire. On forme le circuit  $\mathcal{D}$  en  $u_1$ ,

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1$$

Puisque  $h_1 \notin G_{a_n}^+$ , il est clair qu'ainsi défini, si le circuit  $\mathcal{D}$  est réduit, il est aussi cycliquement réduit. Ainsi, puisque  $\mathcal{D}$  n'est pas trivial,  $\mathcal{D}$  n'est pas réduit. En tant que sous-trajets de trajets réduits,  $\mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}$  et  $\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}$  sont réduits, et donc nécessairement  $\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2$  n'est pas réduit.

$$\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2 : \quad \underbrace{u_1 = u_1 \xrightarrow{-a_n} d_n^- \cdots \xrightarrow{-a_1} d_1^-}_{\mathcal{T}_1^{-1}} \underset{k_1^{-1}l_1}{\circlearrowleft} \underbrace{e_1^- \xrightarrow{b_1} \cdots e_m^- \xrightarrow{b_m} u_2 = u_2}_{\mathcal{T}_2}$$

Puisque  $\mathcal{T}_1^{-1}$  et  $\mathcal{T}_2$  sont réduits, alors nécessairement  $a_1 = b_1$ , et  $k_1^{-1}l_1 \in G_{a_1}^- = G_{b_1}^-$ . On réduit  $\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2$ . Le même argument s'applique, tant que le trajet obtenu a des sous-trajets préfixes et suffixes de la forme :

$$u_1 = u_1 \xrightarrow{-a_n} d_n^- \cdots \cdots e_m^- \xrightarrow{b_m} u_2 = u_2$$

Ainsi en procédant au même raisonnement sur le trajet obtenu et successivement, on finit par obtenir l'un des trajets  $\mathcal{T}$  suivants de  $u_1$  à  $u_2$ , ayant pour label,  $\text{label}(\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2) = \text{label}(\mathcal{T}_1)^{-1}.\text{label}(\mathcal{T}_2)$ , selon si  $n = m$ ,  $n < m$  ou  $n > m$ .

**Premier cas :** C'est le cas où  $n = m$  ; on note  $l = \text{label}(\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2)$ . Nécessairement  $l \in G_{a_n}^+ = G_{b_m}^+$ , car  $a_n = b_m$  et  $l$  est l'image par  $\varphi_{a_n}$  d'un élément de  $G_{a_n}^-$ .

$$\mathcal{T} : \quad u_1 \underset{l}{\circlearrowleft} u_2 \quad \text{avec } l \in G_{a_n}^+ = G_{b_m}^+$$

**Deuxième cas :** C'est le cas où  $n < m$ .

$$\mathcal{T} : \quad u_1 \underset{k}{\circlearrowleft} e_{n+1}^- \xrightarrow{b_{n+1}} \cdots \xrightarrow{b_m} u_2 = u_2$$

**Troisième cas :** C'est le cas où  $n > m$ .

$$\mathcal{T} : \quad u_1 = u_1 \xrightarrow{-a_n} \cdots \xrightarrow{-a_{m+1}} d_{m+1}^- \underset{k'}{\circlearrowleft} u_2$$

Dans le premier cas, on pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{T}_1$ , et l'on note  $\mathcal{C}'_2$  le circuit en  $u_1$  défini par  $\mathcal{C}'_2 = \mathcal{T} \cdot \mathcal{C}_2 \cdot \mathcal{T}^{-1}$ ,

$$\mathcal{C}'_2 : \quad u_1 \underset{lh_2l^{-1}}{\circlearrowleft} u_1$$

Puisque  $l \in G_{a_n}^+$  et  $h_2 \notin G_{a_n}^+$ , alors  $\text{label}(\mathcal{C}'_2) = lh_2l^{-1} \notin G_{a_n}^+$ . Ainsi le circuit  $\mathcal{L}_1\mathcal{C}'_2\mathcal{L}_1^{-1}$  est réduit, et a même label que  $\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}$ , tandis que  $\mathcal{L}_1\mathcal{C}_1\mathcal{L}_1^{-1}$  est réduit et a même label que  $\mathcal{T}_1\mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}$ .

Dans le second cas, on note  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{T}_1$ , et  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{T}$ . Les circuits  $\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}$  et  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{C}_2\mathcal{L}_2^{-1}\mathcal{L}_1^{-1}$  ont même label. Nous affirmons que  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$  est réduit. En effet, si ce n'est pas le cas, alors  $b_{n+1} = -a_n$  et  $k \in G_{a_n}^+$ . Considérons le circuit en  $u_1$ ,  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_1\mathcal{L}_2\mathcal{C}_2\mathcal{L}_2^{-1}$ . Puisque  $\mathcal{L}_2\mathcal{C}_2\mathcal{L}_2^{-1}$  est réduit, et que  $\mathcal{C}_1$  est un circuit trivial,  $\mathcal{D}_1$  est réduit, et non trivial. Ainsi nécessairement,  $\mathcal{D}_1$  n'est pas cycliquement réduit, ce qui implique que  $k^{-1}h_1k \in G_{a_n}^+$ , et donc  $h_1 \in G_{a_n}^+$ , ce qui est contradictoire. Ainsi,  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$  est réduit, et donc  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{C}_2\mathcal{L}_2^{-1}\mathcal{L}_1^{-1}$  aussi. Les circuits  $\mathcal{T}_1\mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}$  et  $\mathcal{T}_2\mathcal{C}_2\mathcal{T}_2^{-1}$  ont respectivement même label que les trajets réduits en  $u$ ,  $\mathcal{L}_1\mathcal{C}_1\mathcal{L}_1^{-1}$  et  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{C}_2\mathcal{L}_2^{-1}\mathcal{L}_1^{-1}$ .

Le troisième cas se traite de façon entièrement analogue au deuxième.

Cette étude permet de mieux comprendre la structure des circuits en  $u$ . Notons  $v_0 = u$ . L'ensemble  $C_0$  des circuits cycliquement réduits en  $u$  coïncide avec l'ensemble des circuits triviaux en  $u$ . Rappelons que tout cycle réduit est nécessairement de longueur paire. Considérons (s'il est non vide), l'ensemble  $C_1$  des circuits réduits en  $u$ , de longueur 2 (sinon, on note  $C_1$  l'ensemble des circuits réduits de longueur 4, etc...). Tout élément de  $C_1$  a même label qu'un circuit en  $u$  sous la forme  $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}_1^{-1}$ , où  $\mathcal{P}$  est de longueur 1, et  $\mathcal{C}$  est un circuit cycliquement réduit et donc trivial (cf. définition VI.1). On considère arbitrairement un élément de  $C_1$ , qui s'écrit sous la forme  $\mathcal{T}_1\mathcal{C}_1\mathcal{T}_1^{-1}$ . On note  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{T}_1$ , et  $v_1$  le point de base du circuit  $\mathcal{C}_1$ . Alors,  $\mathcal{L}_1$  est un trajet de  $v_0$  à  $v_1$ , et tout élément de  $C_1$  s'écrit sous la forme réduite  $\mathcal{L}_1\mathcal{C}\mathcal{L}_1^{-1}$  où  $\mathcal{C}$  est un circuit trivial en  $v_1$ .

En continuant à procéder ainsi, On construit une suite  $(v_n)_{n \in I}$ , pour un ensemble  $I \subset \mathbb{N}$  fini ou infini, vérifiant les propriétés suivantes : les éléments  $v_n$  sont dans des sous-groupes d'arête, et  $v_0 = u$ ; pour tout  $i \in I$  on a un trajet réduit  $\mathcal{L}_i$  de  $v_{i-1}$  à  $v_i$  et  $\mathcal{L}_i\mathcal{L}_{i+1}$  est réduit ; si  $h \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$  commute avec  $u$ , alors il existe  $j$ , et un circuit trivial  $\mathcal{C}$  en  $v_j$ , tel que  $h$  soit le label du circuit réduit suivant en  $u$  :

$$\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_j \mathcal{C} \mathcal{L}_j^{-1} \cdots \mathcal{L}_1^{-1}$$

Le comportement du centralisateur de  $u$  va alors dépendre du fait que la suite  $(v_n)_n$  soit ou non infinie. Supposons que la suite  $(v_n)_n$  soit infinie. Alors nécessairement, il existe un arête  $a$ , d'extrémité  $s$ , et un suite strictement croissante de  $\mathbb{N}$ ,  $\phi_n$ ,



telle que tous les trajets  $\mathcal{L}_{\phi_n}$  aient pour dernière arête  $a$ . Ainsi, on a une suite  $(v_{\phi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G_a^+$ , et pour tout  $v_{\phi_n}$ , un élément  $h_{\phi_n} \in G_s$  qui commute avec  $v_{\phi_n}$ , et qui n'est pas dans  $G_a^+$  ( $h_{\phi_n}$  est le label d'un circuit trivial en  $v_{\phi_n}$ ). Le trajet  $\mathcal{P}_{\phi_n} = \mathcal{L}_{\phi_{n+1}} \cdots \mathcal{L}_{\phi_{n+1}}$  est réduit et non trivial, et va de  $v_{\phi_n}$  à  $v_{\phi_{n+1}}$ . Notons,  $\mathcal{C}_{\phi_n}$  le circuit trivial en  $v_{\phi_n}$  de label  $h_{\phi_n}$ . Formons le circuit  $\mathcal{D}_n$ , en  $v_{\phi_n}$ , défini par  $\mathcal{D}_n = \mathcal{C}_{\phi_n} \mathcal{P}_{\phi_n} \mathcal{C}_{\phi_{n+1}} \mathcal{P}_{\phi_n}^{-1}$ . Rappelons que  $\mathcal{P}_{\phi_n}$  se termine par :  $\xrightarrow{a} v_{\phi_{n+1}} = v_{\phi_{n+1}}$ . Ainsi, puisque  $h_{\phi_{n+1}} \notin G_a^+$ ,  $\mathcal{D}_n$  est réduit. Ainsi,  $\mathcal{D}_n$  se réduit cycliquement en un circuit trivial, et alors nécessairement,  $\text{label}(\mathcal{P}_{\phi_n})^{-1} h_{\phi_n} \text{label}(\mathcal{P}_{\phi_n}) \in G_a^+$ . Ce raisonnement est valide pour tout  $n$ , et ainsi,  $v_{\phi_0}$  est un élément exceptionnel, conjugué à  $u$ .

Ainsi, si  $u$  n'est pas conjugué à un élément exceptionnel, on obtient la suite finie  $v_0, v_1, \dots, v_r$ , avec  $v_0 = u$ . Notons pour tout  $i = 0, \dots, r$ ,  $G_{a_i}$  le groupe d'arête contenant  $v_i$ ,  $s_i$  l'origine de  $a_i$ , et  $l_i = \text{label}(\mathcal{L}_i)$ . Soit  $g$  un élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  qui commute avec  $v_r$ , et soit  $\mathcal{C}$ , un circuit réduit en  $v_r$ , de label  $g$ . Si  $\mathcal{C}$  est trivial, alors  $v_r, g \in G_{s_r}$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  ne soit pas trivial. Alors on peut supposer que  $\mathcal{C} = \mathcal{L} \mathcal{C}' \mathcal{L}^{-1}$  est réduit, où  $\mathcal{L}$  est un trajet réduit de  $v_r$  à  $w$ , et  $\mathcal{C}'$  est un circuit trivial en  $w$ . Nécessairement, par construction de la suite  $v_0, \dots, v_r$ , pour un certain  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ ,  $w = v_i$ , et l'on peut supposer que  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{i+1} \cdots \mathcal{L}_r)^{-1}$ . Soit  $\mathcal{C}''$ , un circuit en  $v_r$ , ayant un label hors de  $G_{a_r}^+$  (par construction un tel circuit existe!), formons  $\mathcal{D}'' = \mathcal{C}'' \mathcal{L} \mathcal{C}' \mathcal{L}^{-1}$ . C'est un circuit non trivial, cycliquement réduit, ce qui est contradictoire. Ainsi, si  $g$  commute avec  $v_r$ , alors  $g \in G_{s_r}$ , i.e.,  $\mathcal{Z}(v_r) \subset G_{s_r}$ . Et bien sûr,  $u$  et  $v_p$  sont conjugués par  $l_1 \cdots l_r$ . Ceci achève la démonstration du cas (i).

Cas (ii) Si  $u$  est dans un groupe de sommet  $G_s$ , et  $h$  commute avec  $u$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , alors avec la proposition 3.2.2,  $h$  est le label d'un circuit en  $u$ . Puisque  $u$  n'est pas conjugué dans  $G_s$  à un élément d'un sous-groupe d'arête, tout circuit en  $u$  est trivial, ainsi  $h \in G_s$ .

Cas (iii) Supposons que  $u$  ne soit pas dans le conjugué d'un groupe de sommet, et que  $u$  et  $v$  commutent. Alors, avec le théorème 3.2.1,

$$u = gcg^{-1}W^s$$

$$v = gc'g^{-1}W^t$$

où  $c, c'$  sont dans un sous-groupe d'arête, et  $gcg^{-1}, gc'g^{-1}, W$  commutent deux à deux. Ainsi, en particulier,  $c$  et  $g^{-1}Wg$  commutent, et donc  $g^{-1}Wg$  est le label d'un circuit  $\mathcal{C}$  en  $c$ . Le trajet  $\mathcal{C}$  est de la forme  $\mathcal{T} \mathcal{C}' \mathcal{T}^{-1}$ , où  $\mathcal{C}'$  est un circuit cycliquement réduit. Si  $c \neq 1$ , alors  $\mathcal{C}'$  est un circuit trivial, et donc il existe un groupe de sommet  $G_s$  et  $k \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$ , tel que  $c$  et  $g^{-1}Wg$  sont dans  $kG_s k^{-1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} u &= gcg^{-1}W^s \\ &= g (cg^{-1}W^s g) g^{-1} \\ &= gk (k^{-1}ck k^{-1}g^{-1}W^s gk) k^{-1}g^{-1} \end{aligned}$$

Mais alors  $u$  est dans un conjugué du groupe de sommet  $G_s$ , ce qui est contradictoire. Ainsi,  $c = 1$ .

De la même façon, si  $c' \neq 1$ , alors  $v$  est dans le conjugué d'un groupe de sommet. Mais avec (i) et (ii),  $u$  est alors aussi dans le conjugué d'un groupe de sommet. Ainsi,  $c = c' = 1$ , et  $\mathcal{Z}(u)$  est un conjugué du groupe cyclique engendré par  $W$ . Puisque  $W$  n'est pas dans le conjugué d'un groupe de sommet, il est sans torsion, et donc  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini. ■

## 6.2 Le groupe d'une variété Haken fermée

Le résultat principal de cette section est la proposition 6.2.1 qui caractérise les trajets et circuits dans le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  associé à la décomposition minimale d'une variété Haken  $M$  à bord torique ou vide. Elle permet tout d'abord de montrer que  $(\mathcal{G}, X)$  est presque sans cycle et sans élément exceptionnel, ce qui avec l'étude de la section précédente (théorème 6.1.1), nous permettra d'en déduire la structure du centralisateur d'un élément dans le groupe d'une variété Haken (Théorème 6.2.1). Mais la proposition 6.2.1 se montrera surtout utile dans le prochain chapitre, pour décider de l'existence d'un trajet entre deux éléments.

### 6.2.1 Circuits et trajets pour une variété Haken

Le résultat suivant classifie les circuits et trajets dans le graphe de groupe associé à la décomposition minimale d'une variété Haken.

**Proposition 6.2.1 (Trajets dans le graphe d'une variété Haken)** *Soit une 3-variété  $M$  Haken orientable, à bord torique ou vide. Soient  $W$  une décomposition minimale de  $M$ , et  $(\mathcal{G}, X)$  le graphe de groupe associé. Alors,*

- (i) *Si la décomposition de  $M$  est triviale, ou si  $M$  est un  $S^1 \times S^1$  fibré sur  $S^1$ , alors dans les deux cas,  $(\mathcal{G}, X)$  est sans circuit.*
- (ii) *Sinon, notons  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_q$  les composantes connexes de la sous-variété de Seifert caractéristique de  $M$ . Pour  $i = 1, \dots, q$ , notons  $\Gamma_i$  le sous-groupe de sommet correspondant à  $\mathcal{S}_i$ , et  $N_i, \Pi_i$  sa fibre, et son sous-groupe canonique (cf. §5.2). Alors, les trajets réduits dans  $(\mathcal{G}, X)$  d'origine  $u \neq 1$ , sont soit triviaux, soit d'une des formes suivantes :*

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} c^- \xrightarrow{a} c^+ \underset{k_2}{\circlearrowleft} v$$

ou

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} c_1 \xrightarrow{a_1} \underbrace{h \underset{k}{\circlearrowleft} h^\varepsilon}_{\text{dans } \Gamma_j} \xrightarrow{a_2} c_2 \underset{k_2}{\circlearrowleft} v$$

pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ , avec  $h, k \in \Gamma_j$ ,  $h \in N_j$ , et  $\varepsilon = 1$  ou  $\varepsilon = -1$ , selon si  $k \in \Pi_j$  ou  $k \notin \Pi_j$ .

De plus, les seuls circuits réduits en  $u \neq 1$ , sont soit triviaux, soit de la forme :

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} c_1 \xrightarrow{a_1} \underbrace{h \underset{k}{\circlearrowleft} h}_{\text{dans } \Gamma_j} \xrightarrow{-a_1} c_1 \underset{ck_1^{-1}}{\circlearrowleft} u$$

pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ , avec  $h, k \in \Gamma_j$ ,  $h \in N_j$ ,  $k \in \Pi_j$ , et de plus,  $c \in G_{a_1}^-$ .

En particulier,  $(\mathcal{G}, X)$  est presque sans circuit, et sans élément exceptionnel.

**Démonstration** Cas (i) Si la décomposition est triviale, le graphe de groupe se réduit à un seul groupe de sommet et aucun groupe d'arête. Il est clair que tout circuit est trivial.

Si  $M$  est un  $S^1 \times S^1$  fibré sur  $S^1$ , alors  $M$  est obtenu à partir de  $S^1 \times S^1 \times I$ , en identifiant  $S^1 \times S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times S^1 \times \{1\}$  le long d'un homéomorphisme  $\phi$ . Notons,  $\pi : S^1 \times S^1 \times I \longrightarrow M$ .

A isotopie près,  $\phi$  est caractérisé par  $\phi_* : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , qui, une fois fixée une base de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , est dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Alors,  $\phi$  est soit périodique, soit réductible, soit Anosov, selon si les valeurs propres de  $\phi_*$  sont complexes, entières ou irrationnelles (cf. [FLP]).

Si  $\phi$  est périodique de période  $p$ , alors  $M$  est un fibré de Seifert. Chaque fibre est l'image par  $\pi$  d'une réunion de  $p$  fibres de la forme  $x \times I$ , avec  $x \in S^1 \times S^1$ . Ainsi  $W$  n'est pas minimale.

Si  $\phi$  est réductible, les valeurs propres de  $\phi_*$  sont  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ , ou  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , et à changement de base près,  $\phi$  est un twist de Dehn. Ainsi,  $\phi$  préserve (globalement) une courbe fermée simple essentielle  $\alpha$  de  $S^1 \times S^1$ . On note  $[\alpha]$  la classe d'homotopie de  $\alpha$  dans  $\pi_1(M)$ . Il est facile de voir que  $[\alpha]$  engendre un sous-groupe normal cyclique infini dans  $\pi_1(M)$ . En outre,  $M$  est Haken. En effet l'image de  $\alpha \times I$  est un tore incompressible à deux faces. Ainsi avec le théorème VI.24 de [Ja],  $M$  est un fibré de Seifert, et donc la décomposition n'est pas minimale.

Si  $\phi$  est Anosov,  $\phi_*$  admet deux valeurs propres irrationnelles distinctes. Le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  a un sommet  $s$  et une arête  $a$ . De plus,

$$G_a^- = G_a^+ = G_s = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Ainsi, si  $\mathcal{C}$  est un trajet réduit non trivial,  $\mathcal{C}$ , ou son inverse est de la forme :

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a} c_1^+ \cdots \xrightarrow{a} \cdots c_n^- \xrightarrow{a} c_n^+ \circ v$$

Alors, puisque  $G_s$  est abélien,  $u = c_1^-$ ,  $c_n^+ = v$ , et pour tout  $i$ ,  $c_i^+ = c_{i+1}^-$ . Ainsi,  $v = \phi_*^n(u)$ . Et si  $\mathcal{C}$  est un circuit,

$$u = \phi_*^n(u)$$

Ainsi,  $u$  est un vecteur propre de  $\phi_*^n$ , de valeur propre 1. Puisque  $\phi_*$  a deux valeurs propres distinctes,  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\phi_*$  est diagonalisable, et donc  $\phi_*^n$  a pour valeurs propres  $\lambda_1^n, \lambda_2^n$ . Ainsi,  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  est une racine  $n$ -ième de l'unité, ce qui est impossible, puisque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont irrationnelles. Ainsi,  $(\mathcal{G}, X)$  ne contient de circuit réduit non trivial.

Cas (ii) Supposons que l'on ait un trajet réduit non trivial  $\mathcal{C}$ , de  $u$  à  $v$ ,

$$u \circ c_1^- \xrightarrow{a_1} c_1^+ \cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{k_i}{\circ} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots c_n^- \xrightarrow{a_n} c_n^+ \circ v$$

Considérons :

$$\cdots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{k_i}{\circ} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots$$

on a ainsi l'égalité :

$$c_i^+ = h_i c_{i+1}^- h_i^{-1} \quad \text{dans } G_{s_i}$$

Le groupe de sommet  $G_{s_i}$  est le groupe fondamental d'une pièce élémentaire  $M_i$ , qui est soit un fibré de Seifert (l'un des  $\mathcal{S}_i$ ), soit une variété hyperbolique de volume fini, et  $c_i^+, c_{i+1}^-$  sont dans des sous-groupes périphéraux de  $\pi_1(M_i) = G_{s_i}$ .

Si  $G_{s_i}$  est le groupe d'une variété hyperbolique de volume fini, alors avec la proposition 4.3.1 (anneaux essentiels), nécessairement  $a_{i+1} = -a_i$ ,  $c_i^+ = c_{i+1}^-$ , et  $h_i \in G_{a_i}^+ = G_{a_{i+1}}^-$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{C}$  soit réduit.

Ainsi,  $G_{s_i} = \Gamma_j$  pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ , *i.e.*  $G_{s_i}$  est le groupe d'un fibré de Seifert  $\mathcal{S}_j$ . Nécessairement,  $\mathcal{S}_j$  est  $\partial$ -irréductible et n'est donc pas homéomorphe à  $D_2 \times I$ . De plus, avec la proposition 2.1.1, aucun des  $\mathcal{S}_i$  n'est homéomorphe à  $S^1 \times S^1 \times I$ . On peut donc appliquer la proposition 5.4.2 (anneaux essentiels dans un Seifert). Ainsi, puisque  $\mathcal{C}$  est réduit,  $c_i^+, c_{i+1}^-$  sont dans la fibre  $N_j$ , et

$$\begin{aligned} c_i^+ &= c_{i+1}^- & \text{si } h_i \in \Pi_j \\ c_i^+ &= c_{i+1}^-^{-1} & \text{sinon} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que nécessairement  $n \leq 2$ . Supposons que l'on ait :

$$\dots \xrightarrow{a_i} c_i^+ \underset{k_i}{\circlearrowleft} c_{i+1}^- \xrightarrow{a_{i+1}} c_{i+1}^+ \underset{k_{i+1}}{\circlearrowleft} c_{i+2}^- \xrightarrow{a_{i+2}} \dots$$

Alors, comme précédemment,  $c_{i+1}^+ \subset N_k \subset \Gamma_k$ , pour  $\mathcal{S}_k$  un fibré de Seifert. Or, avec la proposition 2.1.2,  $\varphi_{a+1}$  ne peut envoyer un élément non trivial de la fibre  $N_j$  sur un élément de la fibre  $N_k$ . Ainsi,  $n \leq 2$ , et l'on ne peut avoir que les trajets figurant dans la conclusion du (ii).

Déterminons maintenant, les circuits réduits non triviaux. Puisqu'un circuit est un trajet, on n'a que les deux cas suivants :

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} c^- \xrightarrow{a} c^+ \underset{k_2}{\circlearrowleft} u$$

dans ce cas,  $a$  est un arête ayant même origine et extrémité  $s$ , et  $k_2 k_1$  conjugue  $c^+$  en  $c^-$ . Avec les propositions, 4.3.1 et 5.4.2, nécessairement  $G_s = \Gamma_j$  est le groupe d'un fibré de Seifert  $\mathcal{S}_j$ , et  $c^+, c^-$  sont dans la fibre  $N_j$ . Or ceci, avec la proposition 2.1.2, est impossible. Dans le deuxième cas,

$$u \underset{k_1}{\circlearrowleft} c_1 \xrightarrow{a_1} \underbrace{h \underset{k}{\circlearrowleft} h^\varepsilon}_{\text{dans } \Gamma_j} \xrightarrow{a_2} c_2 \underset{k_2}{\circlearrowleft} u$$

puisque  $h$  est dans la fibre  $N_j$ , avec la proposition 2.1.2, ni  $c_1$ , ni  $c_2$  n'est dans la fibre  $N_k$  d'un groupe de Seifert  $\mathcal{S}_k$ . Ainsi, avec les propositions 4.3.1 et 5.4.2, puisque,  $c_1, c_2$  sont dans des composantes périphérales, d'un même sous-groupe de sommet, et sont conjugués dans ce sous-groupe, alors nécessairement  $a_1 = -a_2$ , et  $c_1 = c_2$ . Ainsi,  $\varepsilon = 1$ . De plus,  $k_2 k_1 \in G_{a_1}^-$ . On obtient ainsi, le circuit souhaité. ■

### 6.2.2 Propriété algébrique

Comme conséquence immédiate, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 6.2.1 (Centralisateur dans le groupe d'une variété Haken)**

*Soit  $M$  une variété Haken à bord torique ou vide. Soient  $W$  une décomposition minimale de  $M$ , et  $(\mathcal{G}, X)$  le graphe de groupe associé. On note  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p$  les composantes connexes de la sous-variété de Seifert de  $M$ ,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  les sous-groupes de sommets respectifs  $\Gamma_i = \pi_1(\mathcal{S}_i)$ , et pour tout  $i$ ,  $N_i$  la fibre, et  $\Pi_i$  le sous-groupe canonique de  $\Gamma_i$ .*

*Soit  $u$  un élément non trivial de  $\pi_1(M)$ , et  $\mathcal{Z}(u)$  son centralisateur. Alors soit  $\mathcal{Z}(u)$  est cyclique infini, soit, à conjugaison près,  $u$  est dans un groupe de sommet  $\Gamma_i$ . Dans ce cas, soit  $\mathcal{Z}(u)$  est le centralisateur de  $u$  dans  $\Gamma_i$ , soit  $u$  est conjugué à un élément de la fibre  $N_i$ . Le centralisateur d'un élément de  $N_i$  est  $\Pi_i$ .*

**Démonstration** il suffit d'appliquer le théorème 6.1.1 et la proposition 6.2.1. ■

**Remarque 1 :** La proposition 6.2.1 reste vraie pour une variété Haken  $M$  quelconque. Nous pouvons en donner une preuve simple. En effet, dans ce cas  $M$  se décompose le long de tores et d'anneaux, en fibrés de Seifert, en  $I$ -fibrés, et en variétés vérifiant certaines propriétés topologiques (atoroïdales et «pas trop» d'anneaux essentiels). On peut montrer simplement par des arguments topologiques, que les conclusions de la proposition 4.3.1 restent vraies dans les deux derniers cas. Ainsi, le théorème 6.2.1 reste vrai dans le cas d'une variété Haken quelconque.

**Remarque 2 :** C'est aussi le théorème VI.1.6 de [JS], ou plutôt une version de ce résultat dans le cas où le bord est torique ou vide. Remarquer que ce que nous entendons par sous-variété de Seifert, ne correspond pas tout à fait à la notion de sous-variété de Seifert caractéristique de Jaco et Shalen.

# Chapitre 7

## Solution au problème de la conjugaison

Nous donnons dans ce chapitre une solution au problème de la conjugaison dans le groupe d'une variété Haken fermée, ce qui conclut notre travail. Remarquons, bien que cela ne soit pas nécessaire, que tous les raisonnements restent valides dans le cas où  $M$  est Haken, à bord torique.

Avec les théorèmes 4.3.7 et 5.5.1, qui résolvent le problème de la conjugaison pour le groupe d'une variété hyperbolique de volume fini, ou le groupe d'un fibré de Seifert, nous pourrions supposer que  $M$  admet une décomposition minimale non triviale. Nous traitons alors séparément, le cas où  $M$  est un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ . Dans ce cas,  $M$  est un espace fibré de Seifert, ou modelé sur la géométrie Sol. Le cas des fibrés de Seifert ayant déjà été traité (théorème 5.5.1), il ne reste plus qu'à considérer le cas restant de la géométrie Sol, ce qui sera fait dans la première section de ce chapitre.

Dans le cas où  $M$  n'est pas  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ ,  $M$  s'obtient en recollant sur leur bord des fibrés de Seifert et des variétés hyperboliques de volume fini. La variété  $S^1 \times S^1 \times I$  n'apparaît pas comme pièce élémentaire dans une décomposition minimale de  $M$  (proposition 2.1.1). Ce cas recouvre les deux dernières sections de ce chapitre. C'est le cas générique, et la plupart du travail que nous avons effectué jusqu'ici est dévoué à sa résolution.

### 7.1 Le cas de la géométrie Sol

Des huit géométries 3-dimensionnelles, Sol a la particularité d'être celle présentant le moins de symétrie (le stabilisateur d'un point est trivial). Une 3-variété fermée modelée sur Sol, est caractérisée topologiquement par le fait d'être finiment revêtue par un  $S^1 \times S^1$  fibré sur  $S^1$  ayant une application de recollement Anosov ([Sc], théorème 5.3). On peut alors établir le résultat suivant (théorème 5.3, [Sc]).

**Théorème 7.1.1** *Soit  $M$  une 3-variété fermée modelée sur la géométrie Sol. Alors  $M$  est soit un  $S^1 \times S^1$ -fibré sur  $S^1$ , soit obtenu en identifiant deux  $I$ -fibrés non triviaux à base un tore ou une bouteille de Klein, sur leur bord.*

Il est alors facile de vérifier, que sous ces hypothèses,  $M$  est irréductible, et contient un tore essentiel. Ainsi toute 3-variété modelée sur Sol est Haken.

**Théorème 7.1.2 (Algorithme de la conjugaison)** *Le groupe d'une 3-variété fermée, orientable, modelée sur la géométrie Sol, a un problème de la conjugaison résoluble.*

**Démonstration** Nous considérerons séparément les cas où  $M$  est fibré en tores sur le cercle, et où  $M$  est obtenu en identifiant deux  $I$ -fibrés non triviaux.

**Premier cas :**  $M$  est fibré en tores sur le cercle. Notons  $I$  l'intervalle  $[0,1]$ ;  $M$  est obtenu à partir de  $(S^1 \times S^1) \times I$ , en identifiant  $S^1 \times S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times S^1 \times \{1\}$  le long de l'homéomorphisme  $\tilde{\varphi} : (S^1 \times S^1) \times \{0\} \longrightarrow (S^1 \times S^1) \times \{1\}$ , défini par  $\tilde{\varphi}(x,0) = (\varphi(x),1)$  pour tout  $x \in S^1 \times S^1$ , où  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $S^1 \times S^1$  dans lui-même, qui préserve l'orientation. A isotopie près,  $\varphi$  peut être vu comme un élément de  $SL(2,\mathbb{Z})$ . Les éléments de  $SL(2,\mathbb{Z})$  sont classifiés en fonction de leurs valeurs propres en éléments périodiques, réductibles ou Anosov (cf. [FLP]). Nécessairement,  $\varphi$  est Anosov (deux valeurs propres irrationnelles distinctes). En effet, si  $\varphi$  est périodique de période  $p$  (deux valeurs propres complexes conjuguées, racines  $p$ -ièmes de l'unité), alors  $M$  est un fibré de Seifert, dont les fibres sont les images par la surjection canonique  $\pi : (S^1 \times S^1) \times I \longrightarrow M$ , de  $x \times I \cup \varphi(x) \times I \cup \dots \cup \varphi^{p-1}(x) \times I$ , pour tout  $x \in S^1 \times S^1$ . Si  $\varphi$  est réductible (une valeur propre 1 ou  $-1$ ), alors  $\varphi$  préserve une courbe fermée simple essentielle  $\alpha$ . Ainsi, puisque  $\pi_1(M)$  est l'extension HNN du groupe abélien  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , par  $\varphi_*$ ,  $[\alpha]$  engendre dans  $\pi_1(M)$  un sous-groupe normal cyclique infini. Puisque  $M$  est compact, Haken et orientable, avec le théorème VI.24 de [Ja],  $M$  est un fibré de Seifert. Or, avec les théorèmes 5.2 et 5.3 (classification des 3-variétés fermées modelées sur une géométrie), une 3-variété fermée ne peut à la fois être un fibré de Seifert, et être modelée sur Sol. Ainsi  $\varphi$  est Anosov.

L'homéomorphisme  $\varphi$  induit un automorphisme  $\varphi_*$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1)$ . Le groupe fondamental  $\Gamma$  de  $M$  est l'extension HNN,  $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\varphi_*}$  de  $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  le long de  $\varphi_* : G \longrightarrow G$ . Il admet pour présentation (en considérant une base  $a, b$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ) :

$$\langle a, b, t \mid [a, b] = 1, tat^{-1} = \varphi_*(a), tbt^{-1} = \varphi_*(b) \rangle$$

Ainsi, tout élément  $u$  de  $\Gamma$  admet pour forme normale :

$$u = Ut^p \quad \text{avec } U \in G, \text{ et } p \in \mathbb{Z}$$

Connaissant  $\varphi_*$ , on peut effectivement — en utilisant les relations de  $\Gamma$  — mettre tout mot sur les générateurs, sous forme normale. Puisque le problème du mot est résoluble dans  $G$ , on dispose d'une solution au problème du mot pour  $\Gamma$ .

Considérons maintenant deux éléments  $u, v$  de  $\Gamma$ , que l'on peut supposer être donnés par une forme normale cycliquement réduite. On veut décider s'ils sont conjugués dans  $\Gamma$ . Si c'est le cas, alors avec le théorème 3.1.3, nécessairement ils ont même longueur. S'il sont de longueur supérieure à 1

$$u = Ut^p$$



$$v = Vt^p$$

avec  $U, V \in G$ , et  $p \in \mathbb{Z}_*$ . Avec le théorème 3.1.3, ils sont conjugués, s'il existe un élément  $c \in G$ , qui conjugue  $u$  en un conjugué cyclique de  $v$ .

Commençons par voir comment déterminer s'il existe un élément  $c$  de  $G$ , conjuguant  $u$  en  $v$ . C'est le cas lorsque :

$$\begin{aligned} v = V.t^p &= cuc^{-1} \\ &= cUt^pc^{-1} \\ &= cU\varphi_*^p(c)^{-1}t^p \\ &= Uc\varphi_*^p(c)^{-1}t^p \end{aligned}$$

Ainsi, cette condition est équivalente à l'existence d'un élément  $c \in G$ , tel que :

$$U^{-1}V = c\varphi_*^p(c)^{-1}$$

On cherche à résoudre cette équation d'inconnue  $c$ . Remarquons que puisque  $\varphi_*$  est Anosov,  $\varphi_*^p$  est aussi Anosov (ses valeurs propres sont de module  $\neq 1$ ). Notons  $M$  la matrice de  $SL(2, \mathbb{Z})$  associée à  $\varphi_*^p$  pour la base  $\mathcal{B} = \{a, b\}$ .

$$M = Mat(\varphi_*^p, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ , et  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

Puisque  $U^{-1}V \in G$ ,  $U^{-1}V = a^{n_1}b^{n_2}$ , avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Posons,  $c = a^xb^y$ , pour  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Alors,

$$\begin{aligned} U^{-1}V = c\varphi_*^p(c)^{-1} &\iff \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} n_1 = (1 - \alpha)x - \beta y \\ n_2 = -\gamma x + (1 - \delta)y \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système a pour déterminant,  $\det(\text{Id} - M)$ , valeur polynômiale en 1, du polynôme caractéristique de  $M$ . Ainsi, puisque  $\varphi_*^p$  n'admet pas 1 pour valeur propre, il existe un unique couple solution  $(c_1, c_2)$ , avec  $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$  ; et  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$  si et seulement si  $\exists c \in G, U^{-1}V = c\varphi_*^p(c)^{-1}$ , c'est à dire si et seulement si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$  par un élément de  $G$ . Il suffit donc de déterminer les solutions de ce système pour en décider. Pour décider si  $u$  et  $v$  sont conjugués, il suffit d'appliquer plusieurs fois ce même procédé, en ne considérant non plus  $v$ , mais tous ses conjugués cycliques (ils s'écrivent sous la forme  $\varphi_*^k(V)t^p$ , pour  $k$  variant de 1 à  $p$ ).

Si  $u$  et  $v$  sont de longueur 1. En appliquant le théorème 3.1.3 dans ce cas,  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{Z}$ , tel que  $u = \varphi_*^n(v)$ . Puisque  $\varphi_*$  est Anosov, ses valeurs propres sont irrationnelles distinctes. Plus précisément, si  $P_M \in \mathbb{Q}[X]$ , est le polynôme caractéristique de  $M$ , les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $\varphi_*$ , sont dans le corps de décomposition  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  de  $P_M$  sur  $\mathbb{Q}$ , où  $\Delta$  est le discriminant

de  $P_M$ . On peut considérer une base  $\mathcal{B}_1$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , constituée de vecteurs propres de  $\varphi_*$ . Dans cette base,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \quad \text{Mat}(\varphi_*, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où  $u_1, u_2, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2$  sont dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Puisque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de module  $\neq 1$ , le système d'équations

$$\begin{cases} u_1 = \lambda_1^n v_1 \\ u_2 = \lambda_2^n v_2 \end{cases}$$

nous permet de déterminer aisément si un tel  $n$  existe, et donc si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$ .  $\square$

**Deuxième cas :**  $M$  est obtenu en identifiant sur leur bord, deux  $I$ -fibrés non triviaux à base le tore ou la bouteille de Klein. Puisque  $M$  est orientable, chacun des  $I$ -fibrés est aussi orientable, et ne peut donc être que le  $I$ -fibré ayant pour base la bouteille de Klein, et dont le  $S^0$ -fibré associé (*i.e.*  $\partial M$ ) est un tore. Ainsi, si l'on appelle  $N_1, N_2$  les deux  $I$ -fibrés,

$$\pi_1(N_1) = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle \quad \pi_1(\partial N_1) = \langle a^2, b \rangle_{\pi_1(N_1)} \trianglelefteq_2 \pi_1(N_1)$$

$$\pi_1(N_2) = \langle c, d \mid cdc^{-1} = d^{-1} \rangle \quad \pi_1(\partial N_2) = \langle c^2, d \rangle_{\pi_1(N_2)} \trianglelefteq_2 \pi_1(N_2)$$

et  $\pi_1(M)$  est le produit amalgamé de  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$ , le long d'un isomorphisme  $\varphi : \pi_1(\partial N_1) \longrightarrow \pi_1(\partial N_2)$ . Remarquons que si  $\varphi(b) = d^{\pm 1}$ , alors  $b$  engendre dans  $\pi_1(M)$  un sous-groupe normal cyclique infini, et dans ce cas  $M$  est un fibré de Seifert, aussi on pourrait éliminer ce cas. Cela ne nous sera pas utile.

On peut donner une définition combinatoire des sous-groupes  $\pi_1(\partial N_1)$ ,  $\pi_1(\partial N_2)$ . Soit  $\omega$  un mot sur les générateurs  $a, b$ . On dit que  $\omega$  est  $a$ -pair, si la somme des nombres d'occurrence de  $a$  et  $a^{-1}$  dans  $\omega$  est paire, et que  $\omega$  est  $a$ -impair sinon. Puisque la relation  $aba^{-1}b$ , ainsi que les relations triviales, sont des mots  $a$ -pairs, tous les mots représentant un élément de  $\pi_1(N_1)$  ont même  $a$ -parité. Ainsi, un élément de  $\pi_1(N_1)$  sera dit  $a$ -pair, si un (tout) mot le représentant est  $a$ -pair, et  $a$ -impair sinon. Il est clair que tout élément de  $\pi_1(\partial N_1)$  est  $a$ -pair. Réciproquement, on peut utiliser la relation  $aba^{-1} = b^{-1}$ , pour écrire tout élément de  $\pi_1(N_1)$  sous la forme  $a^n b^m$ , et voir ainsi, que  $\pi_1(\partial N_1)$  est exactement le sous-groupe de  $\pi_1(N_1)$  constitué des éléments  $a$ -pairs. L'ensemble des cosets  $\pi_1(N_1)/\pi_1(\partial N_1)$  est représenté par les éléments 1 et  $a$ . De la même façon, on définit l'ensemble des éléments  $c$ -pairs de  $\pi_1(N_2)$ , qui n'est autre que le sous-groupe  $\pi_1(\partial N_2)$ . L'ensemble des cosets  $\pi_1(N_2)/\pi_1(\partial N_2)$  est représenté par les éléments 1 et  $c$ .

En particulier, on dispose d'une procédure pour décider des problèmes du mot généralisés de  $\pi_1(\partial N_1)$  dans  $\pi_1(N_1)$  et de  $\pi_1(\partial N_2)$  dans  $\pi_1(N_2)$ . Ainsi, puisque  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$  ont un problème du mot résoluble (écrire tout élément sous la forme  $a^n b^m$ , ou  $c^p d^q$ ), on peut résoudre le problème du mot dans  $\pi_1(M)$  en écrivant tout élément sous forme normale, dans la décomposition de  $\pi_1(M)$  en amalgame de  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$ .

Puisque  $\pi_1(\partial N_1)$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(N_1)$ , il est distingué dans  $\pi_1(N_1)$  (cf. [Ro]). Ainsi on peut définir l'action de  $\pi_1(N_1)$  sur  $\pi_1(\partial N_1)$  par conjugaison. Puisque  $\pi_1(\partial N_1)$  est abélien, si  $g, g'$  sont deux éléments d'une même classe de  $\pi_1(N_1)/\pi_1(\partial N_1)$ ,  $g, g'$  opèrent de la même façon sur  $\pi_1(\partial N_1)$ . Ainsi, cette action est uniquement déterminée connaissant

$$\begin{aligned} h_a : \pi_1(\partial N_1) &\longrightarrow \pi_1(\partial N_1) \\ g &\longrightarrow a^{-1}ga \end{aligned}$$

en posant pour tout  $(u, x) \in \pi_1(N_1) \times \pi_1(\partial N_1)$ ,  $u.x = x$  si  $u$  est  $a$ -pair, et  $u.x = h_a(x)$  si  $u$  est  $a$ -impair. de la même façon, on a une action par conjugaison de  $\pi_1(N_2)$  sur  $\pi_1(\partial N_2)$ , vérifiant pour tout  $(u, x) \in \pi_1(N_2) \times \pi_1(\partial N_1)$ ,  $u.x = x$  si  $u$  est  $c$ -pair, et  $u.x = h_c(x)$  si  $u$  est  $c$ -impair, avec :

$$\begin{aligned} h_c : \pi_1(\partial N_2) &\longrightarrow \pi_1(\partial N_2) \\ g &\longrightarrow c^{-1}gc \end{aligned}$$

Considérons les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} f_1 : \pi_1(\partial N_1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ f_1(a^2) &= (1, 0) \quad f_1(b) = (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \pi_1(\partial N_2) &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ f_2(c^2) &= (1, 0) \quad f_2(d) = (0, 1) \end{aligned}$$

et considérons  $\tilde{h}_a = f_1 \circ h_a \circ f_1^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial N_1) & \xrightarrow{h_a} & \pi_1(\partial N_1) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{h}_a} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

et  $\tilde{h}_c = f_2 \circ h_c \circ f_2^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial N_2) & \xrightarrow{h_c} & \pi_1(\partial N_2) \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{h}_c} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

alors, si  $\mathcal{C}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,

$$Mat(\tilde{h}_a, \mathcal{C}) = Mat(\tilde{h}_c, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons aussi l'automorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial N_1) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(\partial N_2) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

On se donne  $\tilde{\varphi} \in SL(2, \mathbb{Z})$  par sa matrice sur la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,

$$Mat(\tilde{\varphi}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Revenons-en au problème de la conjugaison. Considérons un élément  $u \in \pi_1(M)$ , et cherchons un représentant  $u'$  cycliquement réduit de sa classe de conjugaison. Alors, soit  $u'$  est dans un des facteurs  $\pi_1(N_1)$  ou  $\pi_1(N_2)$ , soit  $u'$  peut s'écrire :

$$u' = (ac)^n U \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } U \in \pi_1(\partial N_1)$$

Considérons deux éléments  $u, v \in \pi_1(M)$ , que l'on peut supposer cycliquement réduits. On veut décider si  $u$  et  $v$  sont conjugués. Si c'est le cas, nécessairement ils ont même longueur (théorème 3.1.1).

Commençons par supposer que  $u$  et  $v$  sont tous deux de longueur 1. Regardons  $\pi_1(M)$  comme le groupe fondamental du graphe de groupe ayant deux sommets  $S_1, S_2$ , et une arête  $\varepsilon$  de  $S_1$  à  $S_2$ . Avec la proposition 3.2.2,  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si il existe un trajet réduit de  $u$  à  $v$ . Commençons par considérer le cas où il existe un trajet trivial de  $u$  à  $v$ , *i.e.* le cas où  $u$  et  $v$  sont conjugués dans un des facteurs. Dans ce cas, une solution au problème de la conjugaison dans  $\pi_1(N_1) \cong \pi_1(N_2)$  nous permet de conclure. Il est facile de résoudre ce problème. Tout élément de  $\pi_1(N_1)$  admet une écriture unique sous la forme  $a^n b^m$ . Considérons deux éléments de  $\pi_1(N_1)$ , que l'on écrit sous la forme

$$u = a^{n_1} b^{m_1} \quad v = a^{n_2} b^{m_2}$$

alors il est facile de vérifier (nous le laisserons comme exercice au lecteur), que

$$u \sim v \quad \text{dans } \pi_1(N_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1 = n_2 \\ n_1 \text{ est pair} \\ m_1 = \pm m_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} n_1 = n_2 \\ n_1 \text{ est impair} \\ m_1 \equiv m_2 \pmod{2} \end{pmatrix}$$

ce qui fournit une solution au problème de la conjugaison dans  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$ .

Considérons maintenant le cas où  $u$  et  $v$  ne sont pas conjugués dans un facteur. Si  $u$  et  $v$  sont conjugués, nécessairement chacun est conjugué à un élément de  $\pi_1(\partial N_1) = \pi_1(\partial N_2)$ . Puisque  $\pi_1(\partial N_1)$ ,  $\pi_1(\partial N_2)$  sont distingués respectivement dans  $\pi_1(N_1)$  et  $\pi_1(N_2)$ , ce ne peut être le cas, que si  $u$  et  $v$  sont dans  $\pi_1(\partial N_1) = \pi_1(\partial N_2)$ . Ainsi, dans la suite  $u$  et  $v$  seront supposés être des éléments de  $\pi_1(\partial N_1)$ .

Avec les propriétés des actions de  $\pi_1(N_1), \pi_1(N_2)$ , respectivement sur  $\pi_1(\partial N_1)$ , et sur  $\pi_1(\partial N_2)$ , et quitte à changer  $u$  en  $h_a(u)$  ou  $v$  en  $h_c(v)$ , s'il existe un trajet réduit non trivial de  $u$  à  $v$ , alors, il en existe un de la forme suivante :

$$u \underset{a}{\circlearrowleft} u_1^- \xrightarrow{\varepsilon} u_1^+ \underset{c}{\circlearrowleft} u_2^- \xrightarrow{-\varepsilon} \cdots u_{n-2}^+ \underset{a}{\circlearrowleft} u_{n-1}^- \xrightarrow{\varepsilon} u_{n-1}^+ \underset{c}{\circlearrowleft} u_n^- \xrightarrow{-\varepsilon} u_n^+ = v$$

Notons  $h_{ac} : \pi_1(\partial N_1) \longrightarrow \pi_1(\partial N_1)$ , l'automorphisme défini par  $h_{ac}(e) = (ac)^{-1}eac$ . En terme de trajets, on a :

$$e \underset{a}{\circlearrowleft} e_1^- \xrightarrow{\varepsilon} e_1^+ \underset{c}{\circlearrowleft} e_2^- \xrightarrow{-\varepsilon} e_2^+ = h_{ac}(e)$$

Ainsi  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}_*$ , tel que  $v = h_{ac}^n(u)$ . On peut considérer l'automorphisme  $\tilde{h}_{ac}$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial N_1) & \xrightarrow{h_{ac}} & \pi_1(\partial N_1) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{h}_{ac}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

Puisque  $\tilde{h}_{ac} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{h}_c \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{h}_a$ , on peut déterminer la matrice  $M$  de  $\tilde{h}_{ac}$  dans la base canonique  $\mathcal{C}$ , par

$$\begin{aligned} M = \text{Mat}(\tilde{h}, \mathcal{C}) &= \text{Mat}(\tilde{\varphi}^{-1}, \mathcal{C}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \text{Mat}(\tilde{\varphi}, \mathcal{C}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\delta + \beta\gamma & -2\beta\delta \\ -2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui a pour polynôme caractéristique  $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma) + 1$ . Le discriminant de  $P_M$  est  $\Delta = 4[(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - 1]$ . On vérifie alors, que pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ , nécessairement  $\Delta \geq 0$  (*i.e.*  $\tilde{h}_{ac}$  n'est pas périodique), et que  $\Delta = 0$  (*i.e.*  $\tilde{h}_{ac}$  réductible), si et seulement si  $\beta\gamma = 0$  ou  $\beta\gamma = -1$ .

Si  $\tilde{h}_{ac}$  est Anosov (*i.e.*  $\Delta > 0$ ), on peut considérer une base dans laquelle la matrice de  $\tilde{h}_{ac}$  est diagonale, et comme dans le cas où  $M$  est fibré en tores sur le cercle et où  $u$  et  $v$  sont de longueur 1, déterminer s'il existe  $n$  tel que  $v = h^n(u)$ .

Si  $\tilde{h}_{ac}$  est réductible. La condition  $\beta\gamma = 0$  ou  $-1$ , impose que  $M$  soit triangulaire. Sa diagonale consiste en des 1 ou des  $-1$ . Ainsi, par exemple si  $M$  est diagonale supérieure,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & nA \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$M = \begin{pmatrix} -1 & A \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}nA \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Si  $f_1(u) = (u_1, u_2)$ ,  $f_1(v) = (v_1, v_2)$ , alors  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si il existe  $n > 0$ , tel que :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Un tel système nous permet aisément de déterminer si un tel  $n$  existe. Ceci achève le cas où  $u$  et  $v$  sont de longueur 1.

Considérons maintenant le cas où  $u$  et  $v$  sont de longueur supérieure à 1

$$u = (ac)^n U \quad v = (ac)^n V$$

avec  $U, V \in \pi_1(\partial N_1)$ . Avec le théorème 3.1.1,  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si il existe  $e \in \pi_1(\partial N_1)$ , qui conjugue  $u$  en un conjugué cyclique de  $v$ . Rappelons que nous avons noté  $h_{ac} : \pi_1(\partial N_1) \longrightarrow \pi_1(\partial N_1)$ , l'automorphisme défini par  $h_{ac}(e) = (ac)^{-1}e ac$ . Les conjugués cycliques de  $v$ , susceptibles d'être conjugués à  $u$  par un élément de  $\pi_1(N_1)$ , s'écrivent sous la forme  $(ac)^n \varphi_{ac}^p(v)$  pour  $p$  variant de 0 à  $n$ .

Commençons par voir comment déterminer si  $u$  et  $v$  sont conjugués par un élément  $e \in \pi_1(\partial N_1)$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} v &= (ac)^n V = e(ac)^n U e^{-1} \\ &= (ac)^n h_{ac}^n(e) U e^{-1} \\ &= (ac)^n h_{ac}^n(e) e^{-1} U \end{aligned}$$

Ainsi cette condition est équivalente à l'existence de  $e \in \pi_1(\partial N_1)$  tel que :

$$VU^{-1} = h_{ac}^n(e) e^{-1}$$

Nous souhaitons résoudre cette équation d'inconnue  $e \in \pi_1(\partial N_1)$ . Notons dans la base canonique  $\mathcal{C}$ ,

$$f_1(VU^{-1}) = f_1(V) - f_1(U) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Alors il existe  $e \in \pi_1(\partial N_1)$  tel que :  $VU^{-1} = h_{ac}^n(e) e^{-1}$ , si et seulement si, il existe  $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , tel que :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Notons :

$$M^n = \text{Mat}(\tilde{h}_{ac}^n, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

alors  $u$  et  $v$  sont conjugués par un élément de  $\pi_1(\partial N_1)$  si et seulement si le système suivant :

$$\begin{cases} c_1 = (A - 1)x + By \\ c_2 = Cx + (D - 1)y \end{cases}$$

admet un couple de solutions entières. Le déterminant de ce système est la valeur polynômiale en 1, du polynôme caractéristique de  $M^n$ . Ainsi si  $M^n$  n'admet pas pour valeur propre 1, on peut déterminer un unique couple solution  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{Q}$ ,

et  $u$  et  $v$  sont conjugués par un élément de  $\pi_1(\partial N_1)$ , si et seulement si  $x_0, y_0$  sont des entiers, ce dont on peut décider. En résolvant de la même façon, les équations

$$\varphi_{ac}^p(V)U^{-1} = h_{ac}^n(e)e^{-1}$$

d'inconnues  $e$ , pour  $p$  variant de 1 à  $n$ , on peut décider si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\pi_1(M)$ .

Si  $M^n$  admet 1 pour valeur propre, alors  $M$  a une racine  $n$ -ième de l'unité comme valeur propre. Puisque  $M$  n'est pas périodique, nécessairement  $M$  est réductible et admet donc une valeur propre 1 ou  $-1$ . Si  $M$  a pour valeur propre 1 (c'est le cas où  $\beta\gamma = 0$ ) alors  $M$  est triangulaire, et a des 1 sur sa diagonale. Si  $M$  a pour valeur propre  $-1$  (c'est le cas où  $\beta\gamma = -1$ ) alors  $\alpha\delta = 0$ , et  $M$  est triangulaire, et a des  $-1$  sur sa diagonale. De plus,  $n$  est pair. Ainsi,  $M^n$  est triangulaire, et admet des 1 sur sa diagonale. Donc le système devient :

$$\begin{cases} c_1 = By \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = Cx \end{cases}$$

Ainsi  $u$  et  $v$  sont conjugués si et seulement si  $c_2 = 0$  et  $c_1/B \in \mathbb{Z}$  dans le cas où  $M$  est triangulaire supérieure, et  $c_1 = 0$  et  $c_2/C \in \mathbb{Z}$  dans le cas où  $M$  est triangulaire inférieure. Ceci permet de conclure. ■

## 7.2 Le cas Haken, non fibré en tores sur le cercle

Nous considérerons maintenant une 3-variété orientable  $M$ , Haken, fermée, dont la décomposition minimale est non triviale, et qui n'est pas un  $S^1 \times S^1$  fibré sur  $S^1$ . Remarquons, bien que cela ne soit pas nécessaire, que tout ce que nous dirons reste valide, si  $M$  est à bord non vide, constitué de tores.

Notons  $W$  une décomposition minimale de  $M$ . Les composantes connexes de  $\sigma_W(M)$  sont des 3-variétés à bord non vide,  $\partial$ -irréductibles, qui admettent soit une fibration de Seifert, soit une structure hyperbolique de volume fini (théorème 2.1.1), et aucune d'entre-elles n'est homéomorphe à  $S^1 \times S^1 \times I$  (proposition 2.1.1).

Notons  $(\mathcal{G}, X)$  le graphe de groupe associé à la décomposition  $W$  de  $M$  ; bien sûr,  $\pi_1(\mathcal{G}, X) \cong \pi_1(M)$ . On considère une présentation finie du groupe de chacune des pièces élémentaires. Chaque fibré de Seifert sera supposé être muni d'une fibration, et la présentation de son groupe fondamental sera sa présentation canonique pour cette fibration (théorème 5.2.1). Pour un choix d'un arbre maximal  $T$  de  $X$  (que nous fixons dans la suite), on peut donner à  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  une présentation canonique (cf. théorème 2.2.3, remarque 5). Rappelons que la famille génératrice donnée par cette présentation, est notée  $\mathcal{G}en(X)$ .

Si la variété  $M$  est donnée par une triangulation (ou une décomposition de Heegaard, ou une chirurgie sur un entrelacs,...), il existe une procédure permettant de déterminer une décomposition minimale  $W$  pour  $M$  (cf. [JT]). Cet algorithme est basé sur la théorie des surfaces normales due à Haken (cf. [Ha]), les développements postérieurs de Jaco, Oertel ([JO]). Remarquons que cette procédure permet de déterminer la sous-variété de Seifert caractéristique de  $M$ , et une fibration de cette dernière. Ainsi, on peut constructivement se donner le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ , et une présentation canonique de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

Dans toute la suite,  $M$  désignera une 3-variété orientable Haken fermée, qui n'est pas fibrée en tores sur le cercle. On désignera par  $(\mathcal{G}, X)$  le graphe de groupe associé à la décomposition minimale de  $M$ , ainsi obtenu, que l'on supposera muni d'une décomposition  $T$ , et d'une présentation canonique. Nous nous donnerons un élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  sous la forme d'un mot sur la famille génératrice  $\mathcal{G}en(X)$ .

Avant de résoudre l'algorithme de la conjugaison — ce que nous ferons dans la dernière section — nous devons commencer par établir dans la section qui suit, des procédures de «réduction» de mots.

### 7.2.1 Procédures de réduction de mots

Dans un produit amalgamé, ou une extension HNN, tout mot sur les générateurs peut être réduit, ou cycliquement réduit, dès lors que l'on dispose d'une solution au problème de l'appartenance dans les sous-groupes, le long duquel se décompose le groupe. Il n'est pas étonnant, que dans le cas du groupe d'un graphe de groupe, les procédures de réduction de mots se réduisent au problème de l'appartenance dans les sous-groupes d'arête. Nous commencerons donc par établir, sous les hypothèses que nous avons fixées :



**Proposition 7.2.1 (Problème du mot généralisé)** *Soit  $G_\alpha^-$  un sous-groupe d'arête de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Le problème du mot généralisé de  $G_\alpha^-$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est résoluble.*

**Démonstration** Commençons par montrer que l'on peut se donner un élément de  $G_\alpha^-$ , dont le centralisateur dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  est  $G_\alpha^-$ .

Par construction, à  $(\mathcal{G}, X)$  est associée une décomposition minimale non triviale de la 3-variété  $M$ . Le groupe  $G_\alpha^-$  est un sous-groupe libre abélien de rang 2, d'un sous-groupe de sommet  $G_s$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ ;  $G_s$  est isomorphe au groupe fondamental d'une 3-variété  $M_1$ , admettant soit une structure hyperbolique de volume fini, soit une fibration de Seifert, et l'image de  $G_\alpha^-$  dans  $\pi_1(M_1)$  est une composante périphérale.

Considérons un élément  $c \in G_\alpha^-$ , non trivial, et notons  $\mathcal{Z}(c)$  son centralisateur dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Avec la proposition 6.2.1, soit  $\mathcal{Z}(c)$  est aussi le centralisateur de  $c$  dans  $G_s$ , soit  $c$  est conjugué à un élément de la fibre  $N_i$  d'un groupe de sommet  $G_{s_i}$ , groupe fondamental d'un fibré de Seifert. En particulier, dans ce dernier cas, il existe un trajet de  $c$ , à un élément de  $N_i$ . Avec la proposition 6.2.1, qui caractérise les trajets de  $(\mathcal{G}, X)$ , soit le trajet est trivial, soit  $s_i = e(\alpha)$ .

Si  $G_s$  est le groupe d'un fibré de Seifert. On choisit  $c \in G_\alpha^-$ , qui n'est pas dans la fibre  $N$  de  $G_s$ , et tel que si  $s_i = e(\alpha)$ , et  $G_{s_i}$  est le groupe d'un fibré de Seifert, alors  $\varphi_\alpha(c) \notin N_i$ . Puisque la fibre est un sous-groupe cyclique infini, du groupe libre abélien de rang 2,  $G_\alpha^-$ , et que  $\varphi_\alpha$  est un isomorphisme, un tel choix est possible. Avec ce choix, et la proposition 6.2.1, il n'existe pas de circuit non trivial en  $c$ , et donc  $\mathcal{Z}(c)$  est aussi le centralisateur de  $c$  dans  $G_s$ , c'est à dire, avec la proposition 5.4.2,  $\mathcal{Z}(c) = G_\alpha^-$ .

Dans le cas où  $G_s$  est le groupe d'une variété hyperbolique de volume fini, et si  $G_{s_i}$  (où  $s_i = e(\alpha)$ ) est le groupe d'un fibré de Seifert, on prend  $c \in G_\alpha^-$  tel que  $\varphi_\alpha(c) \notin N_i$ , sinon, on prend pour  $c$  n'importe quel élément de  $G_\alpha^-$ . Alors, avec la proposition 6.2.1, il n'existe pas de circuits non triviaux en  $c$ ,  $\mathcal{Z}(c)$  est donc le centralisateur de  $c$  dans  $G_s$ , c'est à dire, avec la proposition 4.3.1,  $\mathcal{Z}(c) = G_\alpha^-$ .

Puisque  $M$  est Haken, avec la proposition 1.4.5,  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  a un problème du mot résoluble. Avec le choix que nous avons fait de l'élément  $c \in G_\alpha^-$ , pour décider si un élément  $\omega \in \pi_1(\mathcal{G}, X)$  est dans  $G_\alpha^-$ , il suffit de décider avec l'algorithme du mot si  $[\omega, c] = 1$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . ■

Il est alors facile d'établir,

**Proposition 7.2.2 (Ecriture sous forme réduite)** *Soit  $(\mathcal{G}, Y)$  un sous-graphe de groupe de  $(\mathcal{G}, X)$ . Si l'on décompose  $(\mathcal{G}, Y)$  le long d'une arête  $\alpha \in \mathcal{A}_Y$ ,  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  se décompose en une extension HNN ou un produit amalgamé, le long de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Dans les deux cas, donné un mot  $\omega$  sur les générateurs de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ , il existe une procédure permettant de donner une écriture sous forme normale pour  $\omega$  et une écriture cycliquement réduite pour un représentant de la classe de conjugaison de  $\omega$ .*

**Démonstration** Remarquons tout d'abord que puisque  $(\mathcal{G}, Y)$  est un sous-graphe de  $(\mathcal{G}, X)$ , la proposition 7.2.1 fournit dans  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  une solution au problème du mot généralisé pour tout sous-groupe d'arête  $G_\alpha^-$ , avec  $\alpha \in \mathcal{A}_Y$ .

Supposons d'abord que  $\alpha$  soit  $T$ -séparante, et notons  $(\mathcal{G}, Y_1)$  et  $(\mathcal{G}, Y_2)$  les graphes de groupe obtenus en décomposant  $(\mathcal{G}, Y)$  le long de  $\alpha$ . La famille génératrice  $S = \mathcal{G}en(Y)$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  donnée par sa présentation canonique, se partitionne en  $S_1 = \mathcal{G}en(Y_1)$  et  $S_2 = \mathcal{G}en(Y_2)$ , familles génératrices respectives de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$  et  $\pi_1(\mathcal{G}, Y_2)$ .

Considérons un élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ , donné par un mot  $\omega$  (non trivial) sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$ . Alors  $\omega$  s'écrit  $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$  où les  $\omega_i$  sont des mots non triviaux, soit sur l'alphabet  $S_1 \cup S_1^{-1}$ , soit sur l'alphabet  $S_2 \cup S_2^{-1}$ , et les mots successifs  $\omega_i$  et  $\omega_{i+1}$  s'écrivent sur des alphabets différents.

On peut supposer que l'origine de  $\alpha$  est un sommet de  $Y_1$ . On transforme alors le mot  $w$  de la façon suivante. Si  $\omega_i$  est un mot sur  $S_1 \cup S_1^{-1}$ . On utilise la proposition 7.2.1, pour décider si  $\omega_i \in G_\alpha^{-1}$ . Si c'est le cas on change le sous-mot  $\omega_{i-1} \omega_i \omega_{i+1}$  de  $\omega$  par le mot  $\omega'_i = \omega_{i-1} \varphi_\alpha(\omega_i) \omega_{i+1}$ ; ce dernier s'écrivant sur l'alphabet  $S_2 \cup S_2^{-1}$ . Sinon on passe au sous-mot suivant  $\omega_{i+1}$ . En répétant ce procédé on obtient une écriture  $\omega' = \omega'_1 \omega'_2 \cdots \omega'_p$ , avec  $p < n$ , sous forme réduite, les mots  $\omega$  et  $\omega'$  représentant le même élément de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ .

Si  $\omega'_1$  et  $\omega'_p$  sont dans des facteurs distincts, alors  $\omega'$  est cycliquement réduit. Sinon on considère le mot  $\omega'' = (\omega'_p \omega'_1) \omega'_2 \cdots \omega'_p$ , que l'on réduit, on obtient un mot de longueur au plus  $p - 1$ . Si le mot obtenu n'est pas cycliquement réduit, on lui applique le même procédé, et successivement, jusqu'à obtenir un mot cycliquement réduit. Il représente un conjugué de  $\omega$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

Si  $\alpha$  est  $T$ -séparante, alors  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  est une extension HNN de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$ , de lettre stable  $t_\alpha$ , et  $S = S_1 \cup \{t_\alpha\}$ , où  $S_1 = \mathcal{G}en(Y_1)$  est une famille génératrice de  $(\mathcal{G}, Y_1)$ . Un mot  $\omega$  sur  $S \cup S^{-1}$ , s'écrit  $\omega = \omega_1 t_\alpha^{p_1} \omega_2 t_\alpha^{p_2} \cdots t_\alpha^{p_n} \omega_p$ , où les  $\omega_i$  sont des mots sur  $S_1 \cup S_1^{-1}$ , et  $\forall i = 1, \dots, n, p_i \in \mathbb{Z}_*$ .

On transforme le mot  $\omega$  de la façon suivante. Si  $p_i < 0$  et  $p_{i+1} > 0$ , On utilise la proposition 7.2.1, pour décider si  $\omega_{i+1} \in G_\alpha^-$ . Si c'est le cas on change le sous-mot  $t_\alpha^{p_i} \omega_{i+1} t_\alpha^{p_{i+1}}$  en  $t_\alpha^{1+p_i} \varphi_\alpha(\omega_{i+1}) t_\alpha^{-1+p_{i+1}}$ . Si  $p_i > 0$  et  $p_{i+1} < 0$ , On utilise encore la proposition 7.2.1, pour décider si  $\omega_{i+1} \in G_\alpha^+$ . Si c'est le cas on change le sous-mot  $t_\alpha^{p_i} \omega_{i+1} t_\alpha^{p_{i+1}}$  en  $t_\alpha^{-1+p_i} \varphi_{-\alpha}(\omega_{i+1}) t_\alpha^{1+p_{i+1}}$ . On obtient un mot de longueur strictement inférieure. Dans tous les autres cas, on laisse ce sous-mot inchangé. En répétant ce procédé tant que cela est possible, on finira par trouver un mot réduit,  $\omega' = \omega'_1 t_\alpha^{q_1} \omega'_2 \cdots t_\alpha^{q_m} \omega_{m+1}$  représentant dans  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ , le même élément que  $\omega$ . Si  $\omega'$  n'est pas cycliquement réduit, alors un de ses conjugués cycliques n'est pas réduit, et on le réduit. Soit le mot obtenu est cycliquement réduit, soit on poursuit le même procédé. On finira par trouver le conjugué souhaité, et son écriture cycliquement réduite. ■

Enfin, si l'on considère un ordre de décomposition de  $(\mathcal{G}, X)$ , on peut établir une procédure de réductions cycliques successives (cf. §3.2.3).

**Proposition 7.2.3 (Réductions cycliques successives)** *Donné un ordre de décomposition de  $(\mathcal{G}, X)$ , on peut algorithmiquement appliquer la procédure de réductions cycliques successives.*

**Démonstration** Pour être appliquée, la procédure décompose le graphe de groupe successivement le long d'arêtes, et nécessite à chaque décomposition, d'écrire un mot

sous forme cycliquement réduite (cf. §3.2.3). On peut faire cela avec la proposition 7.2.2. ■

### 7.2.2 L'algorithme de la conjugaison

Nous conservons les notations du paragraphe précédent. Nous pouvons maintenant établir l'algorithme de la conjugaison dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ . La procédure s'appuie essentiellement sur le théorème de conjugaison dans un graphe de groupe (théorème 3.2.2), les algorithmes de détermination des classes périphérales (propositions 4.3.8 et 5.6.1), les algorithmes de détermination des 2-cosets (propositions 4.3.9, 4.3.10, et 5.6.3, 5.6.4), et l'algorithme du mot dans  $\pi_1(M) = \pi_1(\mathcal{G}, X)$ .

Pour appliquer ces algorithmes nous devons remarquer, que si  $s \in S_X$  est un sommet de  $X$ , alors le groupe de sommet  $G_s$  est le groupe fondamental d'une 3-variété  $M_s$  qui admet soit une fibration de Seifert soit une structure hyperbolique de volume fini, et qui n'est homéomorphe ni à  $S^1 \times D^2$ , ni à  $S^1 \times S^1 \times I$ . Les composantes périphérales  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$  de  $\pi_1(M_s)$  sont en bijection avec les arêtes  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathcal{A}_X$  d'origine  $s$ , et l'isomorphisme naturel de  $\pi_1(M_s)$  dans  $G_s$  envoie chaque composante périphérale  $\mathcal{T}_i$  sur le sous-groupe d'arête  $G_{\alpha_i}^-$  de  $G_s$ .

Nous noterons  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$ . Les éléments de  $G$  sont donnés par des mots (librement réduits) sur la famille génératrice  $\mathcal{Gen}(X)$ . Donnés deux éléments  $g_1, g_2 \in \Gamma$ , on veut décider si  $g_1 \sim g_2$  dans  $\Gamma$ . On commence par appliquer la procédure qui suit :

---

#### Procédure initiale

---

On applique à  $g_1$  et  $g_2$  la procédure de réductions cycliques successives (cf. §3.2.3), en utilisant la proposition 7.2.3. On obtient deux mots  $u$  et  $v$ , dans les classes de conjugaison respectives de  $g_1$  et  $g_2$ , dans  $\Gamma$ . On se trouve alors nécessairement dans l'un des cas suivants :

- **1<sup>er</sup> cas** Il existe des sommets  $s_1, s_2 \in S_X$ , tels que  $u$  soit un mot sur  $\mathcal{Gen}(s_1)$ , et  $v$  soit un mot sur  $\mathcal{Gen}(s_2)$  ; en particulier  $u \in G_{s_1}$ , et  $v \in G_{s_2}$ .
- **2<sup>ème</sup> cas** Les mots  $u$  et  $v$  s'écrivent sur les générateurs  $\mathcal{Gen}(Y)$  de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ , où  $(\mathcal{G}, Y)$  est un sous-graphe de groupe  $\prec$ -occurent de  $(\mathcal{G}, X)$ . Si l'on décompose le graphe  $Y$  le long de l'arête  $\alpha = \min_{\prec}(\mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_Y)$ , le groupe  $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$  se décompose en une extension HNN ou en produit amalgamé. Au sens de cette décomposition,  $u$  et  $v$  sont des mots cycliquement réduits, de même longueur strictement supérieure à 1.
- **3<sup>ème</sup> cas** C'est le cas où l'on ne vérifie ni le 1<sup>er</sup>, ni le 2<sup>ème</sup> cas.

Avec le théorème 3.2.2, dans le 3<sup>ème</sup> cas,  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas conjugués. Dans le 1<sup>er</sup> cas, on passe à la procédure 1, et dans le 2<sup>ème</sup> cas à la procédure 2.

---

#### Procédure 1

---

Si les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont identiques,  $s_1 = s_2 = s$ , alors  $u$  et  $v$  sont dans un même groupe de sommet  $G_s$ , et on commence par décider si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $G_s$ . Puisque  $G_s$  est le groupe fondamental d'un fibré de Seifert, ou d'une variété hyperbolique de volume fini, on peut utiliser pour cela les théorèmes 5.5.1 et 4.3.7,

qui résolvent l'algorithme de conjugaison dans le groupe fondamental de telles 3-variétés. Si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $G_s$ , alors  $g_1$  et  $g_2$  sont conjugués dans  $\Gamma$  et la procédure s'arrête.

Si  $u$  et  $v$  ne sont pas conjugués dans  $G_s$ , ou si  $s_1 \neq s_2$ , alors  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$ , si et seulement si il existe un trajet non trivial de  $u$  à  $v$  (proposition 3.2.2). Il suffit donc pour conclure de décider de l'existence d'un tel trajet. Pour cela, nous commençons par utiliser les propositions 5.6.2, et 4.3.11 (détermination des classes périphérales), pour décider si  $u$  est dans le conjugué dans  $G_{s_1}$ , d'un sous-groupe d'arête  $G_{a_1}^- \subset G_{s_1}$ , et si  $v$  est dans le conjugué dans  $G_{s_2}$ , d'un sous-groupe d'arête  $G_{a_2}^- \subset G_{s_2}$ . On procède ainsi pour tous les sous-groupes d'arête de  $G_{s_1}$  et  $G_{s_2}$ . Avec les propositions 5.4.2 et 4.3.1 (anneaux essentiels),  $u$  et  $v$  ne peuvent être conjugués qu'à un nombre fini (au plus deux), d'éléments de sous-groupes d'arêtes. On peut donc les déterminer tous. Maintenant, avec la proposition 6.2.1, qui caractérise les trajets non triviaux de  $(\mathcal{G}, X)$ ,  $u$  et  $v$  sont conjugués, si et seulement si, on peut trouver des arêtes  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_X$ , d'origines respectives  $s_1, s_2$ , et des éléments  $c_1 \in G_{a_1}^- \subset G_{s_1}$  conjugué de  $u$  dans  $G_{s_1}$ , et  $c_2 \in G_{a_2}^- \subset G_{s_2}$  conjugué de  $v$  dans  $G_{s_2}$ , qui vérifient l'une des conditions suivantes :

- $a_1 = -a_2$ , et  $\varphi_{a_1}(c_1) = c_2$ ,
- $e(a_1) = e(a_2) = s$ , et  $G_s$  est le groupe d'un Seifert, de fibre  $N$ , et  $\varphi_{a_1}(c_1), \varphi_{a_2}(c_2) \in N$ , et  $\varphi_{a_1}(c_1) = \varphi_{a_2}(c_2)^{\pm 1}$ .

Ayant déterminé tous les conjugués périphéraux à  $u$  et  $v$  dans  $G_{s_1}$  et  $G_{s_2}$ , on peut déterminer, si elles existent, les arêtes  $a_1, a_2$ , et avec l'algorithme du mot dans un groupe de sommet, donné par les théorèmes 5.5.1 et 4.3.7, ceci nous permet de décider si  $g_1$  et  $g_2$  sont conjugués dans  $G$ .

---

### Procédure 2

---

Dans un soucis de clarté, nous commencerons par le cas particulier où  $Y$  est un arbre. Le cas général sera traité plus loin.

### Le cas d'un arbre

Notons  $\Gamma' = \pi_1(\mathcal{G}, Y)$ . Lorsque l'on décompose  $Y$  le long de l'arête  $\alpha$ , on obtient deux graphes connexes, que l'on notera  $Y_1$  et  $Y_2$ . Ainsi,  $\Gamma'$  se décompose en un produit amalgamé de  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$  et  $\Gamma_2 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_2)$ , le long de l'isomorphisme  $\varphi_\alpha : G_\alpha^- \longrightarrow G_\alpha^+$ . Dans  $\Gamma'$ , les sous-groupes d'arêtes  $G_\alpha^-$  et  $G_\alpha^+$  sont confondus, et nous noterons  $G_\alpha = G_\alpha^- = G_\alpha^+ \subset \Gamma'$ .

Pour cette décomposition, les éléments  $u$  et  $v$  de  $\Gamma'$  s'écrivent sous forme cycliquement réduite,

$$\begin{aligned} u &= u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n \\ v &= v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n \end{aligned}$$

avec  $n > 1$ . Avec les théorèmes 3.2.2 et 3.1.1,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma'$ , si et seulement si  $u$  est conjugué à un conjugué cyclique de  $v$  par un élément de  $G_\alpha$ .

La méthode consiste à chercher un ensemble fini, exhaustif, de candidats dans  $G_\alpha$ , susceptibles de conjuguer un conjugué cyclique de  $v$  en  $u$ . Pour cela, nous montrons que si  $c$  conjugue (par exemple),  $v$  en  $u$ , alors nécessairement  $c$  vérifie un système d'équations dans des sous-groupes de sommets. La résolution de ces équations grâce aux algorithmes de détermination des 2-cosets, déjà établis, nous permet, s'il existe, de déterminer un unique candidat  $c \in G_\alpha$ .

**Etape initiale :** Sans perte de généralité on suppose que  $u_1, v_1 \in \Gamma_1$ . Alors, puisque  $u$  et  $v$  sont cycliquement réduits,  $u_n, v_n \in \Gamma_2$ . Supposons que  $u$  et  $v$  soient conjugués dans  $\Gamma'$ . Soit  $c \in G_\alpha$ , tel que dans  $\Gamma'$ ,

$$\begin{aligned} u &= c v c^{-1} \\ u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n &= c v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n c^{-1} \end{aligned}$$

ainsi, avec la proposition 2.2.1,

$$u_1 = c v_1 c' \quad \text{dans } \Gamma_1$$

et

$$u_n = c'' v_n c^{-1} \quad \text{dans } \Gamma_2$$

pour  $c', c'' \in G_\alpha$ . Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des groupes de sommet (*i.e.*  $Y_1$  et  $Y_2$  sont réduits à un sommet), alors on passe à l'étape finale. Sinon, on passe à l'étape inductive.

**Etape inductive :** Si  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$  n'est pas un groupe de sommet, alors nécessairement, le graphe  $Y_1$  contient une arête ( $T$ -séparante)  $\beta \in \mathcal{A}_Y^+$ , qui décompose  $Y_1$  en deux graphes connexes  $Y_1^1$  et  $Y_1^2$ , et  $\Gamma_1$  se décompose en produit amalgamé de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y_1^1)$  et  $\pi_1(\mathcal{G}, Y_1^2)$ , le long de l'isomorphisme  $\varphi_\beta : G_\beta^- \longrightarrow G_\beta^+$ . Notons  $\Gamma_1^1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1^1)$  et  $\Gamma_1^2 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1^2)$ . Dans  $\Gamma_1$ , les sous-groupes d'arêtes  $G_\beta^-$  et  $G_\beta^+$  sont confondus ; on notera  $G_\beta = G_\beta^- = G_\beta^+ \subset \Gamma_1$ .

Puisque  $u_1 = c v_1 c'$  dans  $\Gamma_1$ ,  $u_1$  et  $c v_1 c'$  ont même longueur pour la décomposition de  $\Gamma_1$  en amalgame. Avec la proposition 7.2.2, on peut leur donner une écriture sous forme normale (non nécessairement cycliquement réduite). Si ils sont de longueur supérieure à 1, alors dans  $\Gamma_1$ ,

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^1 u_1^2 \cdots u_1^p \\ v_1 &= v_1^1 v_1^2 \cdots v_1^q \end{aligned}$$

et

$$u_1^1 u_1^2 \cdots u_1^p = c v_1^1 v_1^2 \cdots v_1^q c'$$

En remarquant que  $G_\alpha \subset \Gamma_1^1$  ou  $G_\alpha \subset \Gamma_1^2$ , les éléments  $c, c'$  sont de longueur 1, et on vérifie avec la proposition 2.2.1 ,

$$u_1^1 = c v_1^1 d$$

ou

$$u_1^1 = c d$$

dans  $\Gamma_1^1$  ou  $\Gamma_1^2$ , pour  $d \in G_\beta$ . Sinon, si  $u_1$  et  $cv_1c'$  sont de longueur 1, alors

$$u_1 = cv_1c'$$

dans  $\Gamma_1^1$  ou  $\Gamma_1^2$ .

En répétant ce procédé, on obtient finalement dans un sous-groupe de sommet  $G_s$ , contenant les sous-groupes d'arête  $G_\alpha, G_\gamma$ , des éléments  $u_0, v_0 \in G_s$  et l'équation

$$u_0 = cv_0d \quad \text{dans } G_s$$

avec  $c \in G_\alpha$  et  $d \in G_\gamma$ . Il est important de remarquer que si  $\alpha = \gamma$  (c'est le cas où l'on ne passe pas par l'étape inductive), alors  $u_0 = u_1, v_0 = v_1$ , et donc  $v_0 \notin G_\alpha$ . Cela est nécessaire pour appliquer les algorithmes de détermination des 2-cosets I (propositions 4.3.9, 4.3.10).

On procède de la même façon dans  $\Gamma_2$ , avec l'équation  $u_n = c''v_n c^{-1}$ , pour obtenir dans un groupe de sommet  $G_{s'}$ , contenant les groupes d'arête  $G_\alpha, G_\delta$ , des éléments  $u'_0, v'_0 \in G_{s'}$  et l'équation

$$u'_0 = ev'_0c^{-1} \quad \text{dans } G_{s'}$$

avec  $c \in G_\alpha$ , et  $e \in G_\delta$ . Comme précédemment, si  $\alpha = \delta$ , alors  $v'_0 \notin G_\alpha$ . Il faut remarquer que nécessairement, les sommets  $s, s'$  sont distincts.

Une fois déterminées ces deux équations dans  $G_s, G_{s'}$ , d'inconnue  $c \in G_\alpha$ , on passe à l'étape finale.

**Etape finale** Sans perte de généralité on peut supposer que soit  $G_s$  est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de volume fini, soit  $G_s, G_{s'}$  sont groupes fondamentaux de fibrés de Seifert.

### 1<sup>er</sup> cas : $G_s$ est le groupe d'une variété hyperbolique

On utilise les algorithmes de détermination des 2-cosets dans  $G_s$ , propositions 4.3.9 et 4.3.10 (selon si  $\alpha = \gamma$  ou non), pour trouver les uniques éléments  $c \in G_\alpha, d \in G_\gamma$  tels que  $u_0 = cv_0d$ . On détermine alors au plus un candidat  $c \in G_\alpha$ .

### 2<sup>ème</sup> cas : $G_s$ et $G_{s'}$ sont des groupes de fibrés de Seifert

On applique dans  $G_s$  et  $G_{s'}$ , les algorithmes de détermination des 2-cosets, propositions 5.6.3 et 5.6.4 selon si  $\alpha = \gamma$  ou non,  $\alpha = \delta$  ou non, pour déterminer les solutions  $c \in G_\alpha$  des équations

$$\begin{aligned} u_0 &= cv_0d & \text{dans } G_s \\ u'_0 &= ev'_0c^{-1} & \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

Pour chaque équation on obtient soit aucune, soit une infinité de solutions  $c \in G_\alpha$ . Supposons que l'on ait obtenu pour chacune une infinité de solutions. Notons, pour certaines fibrations,  $N$  la fibre de  $G_s$ , et  $N'$  la fibre de  $G_{s'}$ . Les algorithmes de détermination des 2-cosets, permettent de fournir deux éléments  $\mu_1, \mu'_1 \in G_\alpha$ , tels que tous les candidats pour  $c$  dans  $G_s$  sont de la forme  $\mu_1 N$ , et tous les candidats pour  $c$  dans  $G_{s'}$  sont de la forme  $\mu'_1 N'$ .

Supposons que  $N$  soit engendré par  $h$ . Cet élément est représenté par une fibre régulière, donc par une courbe fermée simple, et on peut compléter  $h$  en une base  $\omega, h$  du groupe libre abélien de rang 2,  $G_\alpha$  dans  $G_s$ . Par abus de notation,  $\omega, h$  pourra aussi être vue comme une base de  $G_\alpha$  dans  $G_{s'}$ . Supposons que  $\mu_1 = \omega^a h^b$ , alors,

$$c = \omega^a h^{b+x}$$

pour une inconnue  $x \in \mathbb{Z}$ .

La fibre  $N'$  de  $G_{s'}$  est engendré par un élément  $\omega^p h^q$ . Supposons que  $\mu'_1 = \omega^f h^g$ . Alors,

$$c = \omega^{f+yp} h^{g+yq}$$

pour une inconnue  $y \in \mathbb{Z}$ , et ainsi,

$$\begin{cases} a = f + yp \\ b + x = g + yq \end{cases}$$

Puisque la décomposition  $W$  de  $M$  est minimale,  $p \neq 0$  (proposition 2.1.2. Ainsi, ce système d'équation nous fournit un rationnel  $x$ , et si  $x \in \mathbb{Z}$ , un unique candidat  $c \in G_\alpha$ .

On obtient ainsi, par ce procédé au plus un candidat éventuel  $c \in G_\alpha$ , susceptible de conjuguer  $v$  en  $u$ . On utilise alors l'algorithme du mot dans  $\Gamma = \pi_1(\mathcal{G}, X)$ , pour décider si  $u = c v c^{-1}$  dans  $\Gamma$ .

On procède de la même façon avec tous les conjugués cycliques de  $v$  dans  $\Gamma'$ . Si l'on ne parvient pas de la sorte à trouver un élément  $c \in G_\alpha$  qui conjugue un conjugué cyclique de  $v$  en  $u$ , alors  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas conjugués dans  $\Gamma$ . Dans le cas contraire, clairement,  $g_1$  et  $g_2$  sont conjugués.

### Le cas général

Supposons que  $Y$  ne soit pas un arbre. Alors  $\alpha = \min_{\prec}(\mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_Y)$ , est une arête non  $T$ -séparante de  $Y$ . Notons  $Y_1$  le graphe obtenu en décomposant  $Y$  le long de  $\alpha$ . Alors,  $\Gamma' = \pi_1(\mathcal{G}, Y)$  se décompose en une extension HNN du groupe  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$ , le long de l'isomorphisme  $\varphi_\alpha : G_\alpha^- \longrightarrow G_\alpha^+$ . Nous noterons  $G_\alpha^{-1} = G_\alpha^-$  et  $G_\alpha^1 = G_\alpha^+$ ; cela nous permettra d'employer la notation  $G_\alpha^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = \pm 1$ . La lettre stable est désignée par  $t_\alpha$ .

Pour cette décomposition,  $u$  et  $v$  s'écrivent sous forme cycliquement réduite :

$$\begin{aligned} u &= u_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots u_n t_\alpha^{\varepsilon_n} \\ v &= v_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots v_n t_\alpha^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

avec  $n \geq 1$ , et  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Avec les théorèmes 3.2.2 et 3.1.3,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$  si et seulement ils le sont dans  $\Gamma'$ , si et seulement si un élément  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}$  conjugue un conjugué cyclique de  $v$  en  $u$ . On procède de la même façon que dans le cas d'un arbre, en cherchant un ensemble fini de tels candidats dans  $G_\alpha^{\varepsilon_n}$ .



**Etape initiale** Supposons qu'il existe  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}$ , tel que dans  $\Gamma'$

$$u = c v c^{-1}$$

soit

$$u_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots u_n t_\alpha^{\varepsilon_n} = c v_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots v_n t_\alpha^{\varepsilon_n} c^{-1}$$

alors

$$u_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots t_\alpha^{\varepsilon_{n-1}} u_n = c v_1 t_\alpha^{\varepsilon_1} \cdots t_\alpha^{\varepsilon_{n-1}} v_n \varphi_\alpha^{-\varepsilon_n}(c^{-1})$$

On notera  $\tilde{c} = \varphi_\alpha^{-\varepsilon_n}(c)$ ;  $c$  est un élément de  $G_\alpha^{\varepsilon_n}$ . Nous distinguerons deux cas :

**1<sup>er</sup> cas** Si  $n = 1$ , alors :

$$u_1 = c v_1 \tilde{c}^{-1} \quad \text{dans } \Gamma_1$$

avec  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}, \tilde{c} \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}$ .

**2<sup>ème</sup> cas** Si  $n > 1$ , alors dans  $\Gamma_1$  on dispose des deux équations :

$$\begin{aligned} u_1 &= c v_1 c' \\ u_n &= c'' v_n \tilde{c}^{-1} \end{aligned}$$

pour certains  $c' \in G_\alpha^{-\varepsilon_1}$ ,  $c'' \in G_\alpha^{\varepsilon_{n-1}}$ , et bien sûr,  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}$ , et  $\tilde{c} \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}$ . Puisque  $u$  et  $v$  sont cycliquement réduits, si  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_n$ , alors  $v_1 \notin G_\alpha^{\varepsilon_n}$ , i.e. si  $c, c'$  sont dans le même sous-groupe d'arête  $G_\alpha^\varepsilon$ , alors  $v_1 \notin G_\alpha^\varepsilon$ . De la même façon, si  $\varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n$ , alors  $v_n \notin G_\alpha^{\varepsilon_{n-1}}$ .

Dans les deux cas, si  $\Gamma_1$  est un sous-groupe de sommet, on passe à l'étape finale, sinon on passe à l'étape inductive.

**Etape inductive** Si  $\Gamma_1 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_1)$  n'est pas un sous-groupe de sommet,  $Y_1$  n'est pas restreint à un sommet. Soit  $Y_1$  est un arbre, soit il contient une arête non  $T$ -séparante  $\beta \in \mathcal{A}_{Y_1}^+$ .

Si  $Y_1$  est un arbre, on procède à l'étape inductive dans le cas déjà traité d'un arbre, en prenant néanmoins quelques précautions dans le premier cas. Dans le second cas, en appliquant normalement la procédure, on finit par déterminer dans deux sous-groupes de sommet  $G_s, G_{s'}$ , deux équations :

$$\begin{aligned} u_0 &= c v_0 d && \text{dans } G_s \\ u'_0 &= e v'_0 \tilde{c}^{-1} && \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, la particularité provient du fait que l'on ne dispose plus que d'une seule équation, mais ce que l'on perd en quantité, on le retrouve en qualité, puisque cette équation a pour inconnues  $c, \tilde{c}$ , et que  $c = \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c})$ . En procédant à l'étape inductive, on peut déterminer soit deux équations du type précédent, soit une seule équation dans un groupe de sommet  $G_s$ , de la forme suivante :

$$u_0 = c v_0 \tilde{c}^{-1} \quad \text{dans } G_s$$

On passe alors à l'étape finale (du cas général).

Si  $Y_1$  n'est pas un arbre, notons  $Y_2$  le graphe obtenu en retirant l'arête non  $T$ -séparante  $\beta$  de  $Y_1$ . Alors, le groupe  $\Gamma_1$  se décompose en une extension HNN de  $\Gamma_2 = \pi_1(\mathcal{G}, Y_2)$ , le long de l'isomorphisme  $\varphi_\beta : G_\beta^- \longrightarrow G_\beta^+$ . Notons  $t_\beta$  la lettre stable, et comme précédemment, on commet l'abus de noter  $G_\beta^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = \pm 1$ .

On dispose dans  $\Gamma_1$  soit, dans le premier cas, de l'équation :

$$u_1 = c v_1 \tilde{c}^{-1}$$

soit, dans le second cas, des deux équations :

$$\begin{aligned} u_1 &= c v_1 c' \\ u_n &= c'' v_n \tilde{c}^{-1} \end{aligned}$$

Nécessairement, les deux termes de chaque égalité ont même longueur pour cette décomposition de  $\Gamma_1$ .

On utilise la proposition 7.2.2 pour écrire  $u_1$  et  $v_1$  sous forme normale pour cette décomposition HNN de  $\Gamma_1$ . Si  $u_1$  et  $v_1$  sont dans  $\Gamma_2$  alors, on doit avoir la même équation dans  $\Gamma_2$ . Sinon,

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots u_1^p t_\beta^{\mu_p} u_1^{p+1} \\ v_1 &= v_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots v_1^p t_\beta^{\mu_p} v_1^{p+1} \end{aligned}$$

et ainsi, dans le premier cas,

$$u_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots u_1^p t_\beta^{\mu_p} u_1^{p+1} = c v_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots v_1^p t_\beta^{\mu_p} v_1^{p+1} \tilde{c}^{-1}$$

et dans le second cas,

$$u_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots u_1^p t_\beta^{\mu_p} u_1^{p+1} = c v_1^1 t_\beta^{\mu_1} \cdots v_1^p t_\beta^{\mu_p} v_1^{p+1} c'$$

Puisque  $c, c', \tilde{c}$  sont de longueur 1, on obtient dans le premier cas, deux équations dans  $\Gamma_2$ ,

$$u_1^1 = c v_1^1 d \quad \text{ou} \quad u_1^1 = c d$$

et

$$u_1^{p+1} = e v_1^{p+1} \tilde{c}^{-1} \quad \text{ou} \quad u_1^{p+1} = e \tilde{c}^{-1}$$

pour certains  $d \in G_\beta^{-\mu_1}$ , et  $e \in G_\beta^{\mu_p}$ .

Dans le second cas on obtient dans  $\Gamma_2$  l'équation :

$$u_1^1 = c v_1^1 d \quad \text{ou} \quad u_1^1 = c d$$

et on procède de la même façon avec la seconde équation de  $\Gamma_1$  invoquant  $u_n$  et  $v_n$ , pour obtenir  $u_n^1, v_n^1 \in \Gamma_2$  et l'équation de  $\Gamma_2$  :

$$u_n^1 = f v_n^1 \tilde{c}^{-1}$$

pour  $f \in G_\beta^{\pm 1}$ .

Dans tous les cas, si  $\Gamma_2$  est un groupe de sommet, on passe à l'étape finale. Sinon, on répète ce procédé en décomposant  $\Gamma_2$ . On commence par décomposer le

long des arêtes non  $T$ -séparantes, puis dès que l'on a obtenu un arbre (maximal), on continue en utilisant l'étape inductive du cas déjà traité d'un arbre, avec les mêmes précautions que précédemment. Finalement, on finira par obtenir :

Dans le premier cas, soit deux groupes de sommet  $G_s, G_{s'}$ , les éléments  $u_0, v_0 \in G_s$  et  $u'_0, v'_0 \in G_{s'}$  et deux équations :

$$\begin{aligned} u_0 &= c v_0 d && \text{dans } G_s \\ u'_0 &= e v'_0 \tilde{c}^{-1} && \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

d'inconnues  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}, \tilde{c} \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}, d \in G_\gamma^-, e \in G_\delta^-$ , pour certaines arêtes  $\gamma, \delta$ , d'origines  $s, s'$  ; soit une seule équation dans  $G_s$ ,

$$u_0 = c v_0 \tilde{c}^{-1} \quad \text{dans } G_s$$

Dans le second cas, on détermine deux groupes de sommet  $G_s, G_{s'}$ , les éléments  $u_0, v_0 \in G_s$  et  $u'_0, v'_0 \in G_{s'}$  et deux équations ;

$$\begin{aligned} u_0 &= c v_0 d && \text{dans } G_s \\ u'_0 &= e v'_0 \tilde{c}^{-1} && \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

d'inconnues  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}, \tilde{c} \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}, d \in G_\gamma^-, e \in G_\delta^-$ , pour certaines arêtes  $\gamma, \delta$ , d'origines  $s, s'$ .

On peut alors passer à l'étape finale. Remarquons que dans les deux cas, si  $\alpha = \gamma$ , et  $\varepsilon_n = -1$ , alors  $v_0 \notin G_\alpha^-$ , et de même, si  $\alpha = \delta$  et  $\varepsilon_n = -1$ , alors  $v'_0 \notin G_\alpha^-$ .

**Etape finale** Cette étape se scinde en quatre cas.

**1<sup>er</sup> cas :  $G_s$  est le groupe d'une variété hyperbolique.**

On dispose dans  $G_s$  d'une équation de la forme  $u_0 = c v_0 d$ , d'inconnues  $(c, d)$ . On peut appliquer les algorithmes de détermination des 2-cosets (propositions 4.3.9 ou 4.3.10), pour déterminer au plus un couple solution. On obtient ainsi au plus un candidat  $c \in G_\alpha^{\varepsilon_n}$  susceptible de conjuguer  $v$  en  $u$ .

**2<sup>ème</sup> cas :  $G_{s'}$  est le groupe d'une variété hyperbolique.**

On dispose dans  $G_{s'}$  d'une équation de la forme  $u'_0 = e v'_0 \tilde{c}^{-1}$ , d'inconnues  $(e, \tilde{c})$ . On utilise encore les propositions 4.3.9 ou 4.3.10 pour déterminer au plus un couple solution, et donc au plus un élément  $\tilde{c} \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}$ . On peut alors déterminer un candidat éventuel  $c = \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c})$ .

**3<sup>ème</sup> cas :  $G_s$  est le groupe d'un fibré de Seifert, et l'on a l'équation :**

$$u_0 = c v_0 \tilde{c}^{-1} \quad \text{dans } G_s$$

d'inconnues  $(c, \tilde{c}) \in G_\alpha^{\varepsilon_n} \times G_\alpha^{-\varepsilon_n}$ . Notons  $N$  la fibre de  $G_s$ .  $N$  est engendré par un élément  $h$ , et l'on peut considérer une base  $\omega, h$  de  $G_\alpha^{\varepsilon_n}$ . Posons  $\mu = 1$  si  $v_0$  est pair, et  $\mu = -1$  sinon. Avec les propositions 5.6.3 ou 5.6.4, on peut déterminer l'ensemble

des couples solutions. Il est soit vide, soit de la forme  $\{(c_0 h^x, h^{-\mu x} \tilde{c}_0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ . Dans le dernier cas, puisque  $\tilde{c} = \varphi_\alpha^{-\varepsilon_n}(c) = h^{-\mu x} \tilde{c}_0$ ,

$$c = \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c}) = \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(h^{-\mu x} \tilde{c}_0) = (\varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(h))^{-\mu x} \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c}_0)$$

Dans la base  $\omega, h$ ,

$$c_0 = (a, b), \quad \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c}_0) = (c, d), \quad \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(h) = (p, q)$$

et puisque la décomposition  $W$  de  $M$  est minimale, avec la proposition 2.1.2,  $p \neq 0$ . On obtient ainsi,

$$(a, b + x) = (c, d) - \mu x(p, q)$$

et donc  $x = \mu^{-1}_p(c - a)$ . Si  $x \in \mathbb{Z}$ , ceci détermine uniquement  $c = c_0 h^x$ .

**4<sup>ème</sup> cas :  $G_s, G_{s'}$  sont des groupes de fibrés de Seifert, et l'on a les équations :**

$$\begin{aligned} u_0 &= c v_0 d && \text{dans } G_s \\ u'_0 &= e v'_0 \tilde{c}^{-1} && \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

Notons  $N = \langle h \rangle$ , et  $N' = \langle h' \rangle$  les fibres respectives de  $G_s$  et  $G_{s'}$ . On applique les algorithmes de détermination des 2-cosets (propositions 5.6.3 et 5.6.4). On détermine alors des éléments  $c_0 \in G_\alpha^{\varepsilon_n}, \tilde{c}_0 \in G_\alpha^{-\varepsilon_n}$ , tels que

$$\begin{aligned} c &= c_0 h^x && \text{dans } G_s \\ \tilde{c} &= \tilde{c}_0 h'^y && \text{dans } G_{s'} \end{aligned}$$

Dans la base  $\omega, h$  de  $G_\alpha^{\varepsilon_n}$ ,

$$c_0 = (a, b), \quad \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c}_0) = (c, d), \quad \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(h') = (p, q)$$

et puisque la décomposition  $W$  de  $M$  est minimale, avec la proposition 2.1.2,  $p \neq 0$ . Ainsi, puisque  $c = \varphi_\alpha^{\varepsilon_n}(\tilde{c})$ ,

$$(a, b + x) = (c, d) + y(p, q)$$

On obtient ainsi le système d'inconnues  $x, y$ ,

$$\begin{cases} a = c + py \\ b + x = d + qy \end{cases}$$

qui, puisque  $p \neq 0$ , admet un unique couple de solutions, rationnelles  $(x, y)$ . Si  $x \in \mathbb{Z}$ , alors on obtient le candidat  $c = c_0 h^x \in G_\alpha^{\varepsilon_n}$ .

Une fois déterminé un candidat éventuel  $c$ , susceptible de conjuguer  $v$  en  $u$ , on utilise l'algorithme du mot (théorème 1.4.5) pour décider si  $u = c v c^{-1}$  dans  $\Gamma$ . On procède de la même façon avec tous les conjugués cycliques de  $v$ . Si l'on détermine ainsi, un élément conjuguant un conjugué cyclique de  $v$  en  $u$ , alors  $g_1 \sim g_2$  dans  $\Gamma$ . Dans le cas contraire,  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas conjugués dans  $\Gamma$ . ■

Nous venons de montrer :

**Théorème 7.2.1** *Soit  $M$  une 3-variété Haken, orientable, fermée, qui n'est pas fibrée en tores sur le cercle. Il existe une procédure permettant de décider pour deux éléments de  $\pi_1(M)$ , si ils sont ou non conjugués.*

Avec les théorèmes 7.1.2 et 1.5.2,

**Théorème 7.2.2** *Soit  $M$  une 3-variété Haken orientable. Alors  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison soluble.*

Avec les propositions 7.1.2, 5.5.1, et 1.5.1

**Théorème 7.2.3** *Soit  $M$  une 3-variété orientable, vérifiant l'hypothèse de Thurston. Alors  $\pi_1(M)$  a un problème de la conjugaison résoluble*

On obtient alors aisément le corollaire suivant :

**Corollaire 7.2.1** *Soit  $M$  une 3-variété orientable à bord non vide. Le problème de la conjugaison est résoluble dans  $\pi_1(M)$ . Si  $N$  est une composante connexe de  $\partial M$ , et si  $T$  est l'image de  $\pi_1(N)$  dans  $\pi_1(M)$ , alors le problème consistant à décider si un élément arbitraire arbitraire de  $\pi_1(M)$  est conjugué à un élément de  $T$  est résoluble. Sous sa forme topologique, donné un lacet  $l$  de  $M$ , on peut décider si  $M$  est librement homotope à un lacet de  $N$ .*

**Démonstration** La première partie de l'énoncé est claire, puisque toute 3-variété à bord non vide vérifie l'hypothèse de géométrisation de Thurston. Pour établir la seconde partie de l'énoncé doublons la variété  $M$  le long de  $N$ , pour obtenir la variété  $2M$ . Notons  $G = \pi_1(M)$ , et considérons une copie isomorphe  $G'$  de  $G$ , et l'isomorphisme  $\varphi : G \rightarrow G'$ . L'image de  $T$  par  $\varphi$  sera notée  $T'$ . Alors  $\pi_1(2M)$  est le produit amalgamé de  $G$  et  $G'$  le long de la restriction de  $\varphi$  à  $T$ . Si  $M$  vérifie l'hypothèse de géométrisation, alors il en est de même de la variété  $2M$ . Ainsi  $\pi_1(2M) = 2G$  a un problème de la conjugaison résoluble. Afin de conclure, nous montrons qu'un élément  $u \in G$  est conjugué à un élément de  $T$ , si et seulement si,  $u$  et  $\varphi(u)$  sont conjugués dans  $2G$ .

Si  $u$  est conjugué à  $t \in T$ , par  $g$ ,  $u = g t g^{-1}$ , alors clairement,  $\varphi(g)g^{-1}$  conjugue  $u$  en  $\varphi(u)$  dans  $2G$ .

Considérons le graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$  associé à la décomposition en produit amalgamé de  $2G$ . Il a deux sous-groupes de sommet  $G, G'$ , et un sous-groupe d'arête  $T$ . Si  $u$  et  $\varphi(u)$  sont conjugués dans  $2G$ , avec la proposition 3.2.2, il existe un trajet de  $u$  à  $\varphi(u)$  dans  $(\mathcal{G}, X)$ . Puisque  $u$  et  $\varphi(u)$  sont dans des sous-groupes de sommet distincts, ce trajet peut-être supposé non trivial. Ainsi,  $u$  est conjugué à un élément d'un sous-groupe d'arête, c'est à dire à un élément de  $T$ .

Ainsi, pour décider si  $u$  est conjugué à un élément de  $T$  dans  $G$ , il suffit de décider avec l'algorithme de la conjugaison dans  $2G$ , si  $u \sim \varphi(u)$ . ■

C.Q.F.D.

# Bibliographie

- [BP] R.BENEDETTI et C.PETRONIO, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer, 1992.
- [BHP] W.BOONE, W.HAKEN, et V.POÉNARU, *On recursively unsolvable problems in topology and their classification*, Contributions to Mathematical logic, (K. Schütte, éd.), 1968.
- [BM] G.BURDE and K.MURASUGI, *Links and Seifert fibered spaces*, Duke Mathematical Journal **37** (1970), pp. 89–93.
- [CEG] R.CANARY, D.EPSTEIN, et L.GREEN, *Notes on notes of Thurston in «Analytical and geometric aspects of hyperbolic space»*, London Math. Soc. Lectures Notes **111**, Cambridge University Press (1992), pp. 3–92.
- [CDP] M.COORNAERT, T.DELZANT, et A.PAPADOPOULOS, *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Mathematics **1441**, Springer-Verlag, 1991.
- [Da] M.DAVIS, *Computability and unsolvability*, McGraw-Hill book company, 1958.
- [De1] M.DEHN, *Über die topologie des dreidimensional raumes*, Math. Ann. **69** (1910), pp. 137–168.
- [De2] M.DEHN, *Über unendliche diskontinuierliche gruppen*, Math. Ann. **71** (1912), pp. 116–144.
- [De3] M.DEHN, *Transformation der kurven auf zweiseitigen flächen*, Math. Ann. **72** (1912), pp. 413–421.
- [DD] W.DICKS et M.DUNWOODY, *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1989.
- [CEHLPT] D.EPSTEIN et al., *Word processings in groups*, Jones and Bartlett, 1992.
- [EH1] D.EPSTEIN et D.HOLT, *Computation in word-hyperbolic groups*, preprint, 1998.
- [EH2] D.EPSTEIN et D.HOLT, *Efficient computation in word-hyperbolic groups* in «Computational and geometric aspects of modern algebra», (M.ATKINSON, N.GILBERT, J.HOWIE, S.LINTON, et E.ROBERTSON, éd.), L. M. S. Lecture Note Series **275**, Cambridge University Press (2000), pp. 66–77.
- [FLP] A.FATHI, F.LAUDENBACH, et V.POÉNARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, astérisque **66–67**, Société Mathématiques de France (1979).
- [GHVS] E.GHYS, A.HAEFLIGGER, A.VERJOVSKY, et H.SHORT, *Notes on word hyperbolic groups* in «Group theory from a geometrical viewpoint», (H.SHORT éd.), World Scientific, 1991.

- [GdlH] E.GHYS et P.DE LA HARPE (éd.), *Les groupes hyperboliques d'après Gromov*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1990.
- [Gr] M.GROMOV, *Hyperbolic groups* in «*Essays in group theory*», MSRI Publications, Springer (1987), pp. 75–263.
- [Ha] W.HAKEN, *Theorie der normalflächen*, Acta Mathematica **105** (1961), pp. 245–375.
- [He] J.HEMPEL, *3-manifolds*, Annals of mathematics studies, Princeton university press, 1976.
- [Ho] D.HOLT, *KBMAG Knuth-Bendix in monoids and automatic groups*, Logiciel disponible par `ftp.warwick.ac.uk` dans le répertoire `people/dfh/kbmag2`.
- [Ja] W.JACO, *Lectures on three-manifold topology*, Publications of the Conference Board of the Mathematical Sciences **43**, American Mathematical Society (1977).
- [JO] W.JACO and U.OERTEL, *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold*, Topology **23** (1984) (2), pp. 195–209.
- [JS] W.JACO et P. SHALEN, *Seifert fibre space in 3-manifolds*, Memoirs of the American Mathematical Society **220** (1979).
- [JT] W.JACO et J.TOLLEFSON, *Algorithms for the complete decomposition of a closed 3-manifold*, Illinois journal of mathematics **39** (1995).
- [LS] R.LYNDON et P.SCHUPP, *Combinatorial group theory*, Springer Verlag, 1976.
- [MKS] W.MAGNUS, A.KARASS, et D.SOLITAR, *Combinatorial group theory*, J.Wiley & sons, 1966.
- [Mi1] C.MILLER, *On group-theoretic decision problems and their classification*, Princeton university press, 1971.
- [Mi2] C.MILLER, *Decision problems for groups: survey and reflections*, in «*Algorithms and classification in combinatorial group theory*», MSRI Publications, (G.Baumslag et C.Miller, éd.), **23**, Springer-Verlag (1992), pp. 1–59.
- [Mo] E.MOISE, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and hauptvermutung*, Annals of Math. **56** (1952), pp. 96–114.
- [No] P.NOVIKOV, *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov **44** (1955).
- [Or] P.ORLIK, *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **291**, Springer-Verlag (1972).
- [Pa] P.PAPASOGLU, *Strongly geodesically automatic groups are hyperbolic*, preprint, Université de Warwick (1994).
- [Ra] J.RATCLIFFE, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag, 1994.
- [Ro] J.ROTMAN, *An introduction to the theory of groups*. Graduate Texts in Mathematics **148**, Springer Verlag, 1995.
- [Sc] P.SCOTT, *The geometries of 3-manifolds*. Bulletin of the London Mathematical Society **15**, London Math. Society (1983), pp. 401–487.
- [Sei] H.SEIFERT, *Topology of three dimensional fibered spaces*, Acta Mathematica **60** (1933), pp. 147–288.

- [Sel] Z.SELA, *The conjugacy problem for knots groups*, Topology **32** (1993) (2).
- [Ser] J-P.SERRE, *Arbres, amalgames, et  $SL_2$* , astérisque **46**, Société Mathématiques de France (1977).
- [St] J.STILLWELL, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer, 1993.
- [Th1] W.THURSTON, *The geometry and topology of three-manifolds*, (1980), notes distribuées par l'université de Princeton. Une version électronique est disponible sur le site <http://www.msri.org>.
- [Th2] W.THURSTON, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bulletin of the American Mathematical Society **6** (1982) (3).
- [Th3] W.THURSTON, *Three-dimensional geometry and topology*, **1**, (S.LEVY éd.), Princeton university press, 1997.
- [Wa1] F.WALDHAUSEN, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Annals of Math. **87** (1968), pp. 56–88.
- [Wa2] F.WALDHAUSEN, *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds*, Annals of Math. **88** (1968), pp. 272–280.





# Glossaire

## – Théorie des ensembles

- $\emptyset$  ..... L'ensemble vide
- $x \in X$  ..... L'élément  $x$  appartient à  $X$
- $A \subset X$  ..... L'ensemble  $A$  est un sous-ensemble de  $X$
- $A \subsetneq X$  .....  $A$  est un sous-ensemble propre de  $X$
- $A \cup B$  ..... Réunion des ensembles  $A$  et  $B$
- $A \cap B$  ..... Intersection des ensembles  $A$  et  $B$
- $X - A$  ..... Complémentaire de  $A$  dans  $X$
- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ..... Ensemble constitué des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ..... Le  $n$ -uplet constitué des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ..... Suite infinie  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$
- $\text{card}(A)$  ..... Cardinal de l'ensemble  $A$
- $A \times B$  ..... Produit cartésien de  $A$  et  $B$
- $f : X \longrightarrow Y$  ..... Application de  $X$  dans  $Y$
- $f|_A$  ..... Restriction de  $f$  à  $A \subset X$
- $f(A)$  ..... Image directe de  $A \subset X$  par  $f$
- $f^{-1}(B)$  ..... Image réciproque de  $B \subset Y$  par  $f$
- $f \circ g$  ..... Composée des applications  $f$  et  $g$
- $\text{Id}_X$  ..... L'application identité de  $X$  dans  $X$
- $f^{-1}$  ..... Si  $f$  est bijective, application réciproque de  $f$
- $i : X \hookrightarrow Y$  ..... Si  $X \subset Y$ , l'application d'inclusion de  $X$  dans  $Y$
- $\mathbb{N}, \mathbb{N}_*$  ..... Ensembles des entiers naturels, des entiers naturels non nuls
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_*$  ..... Ensembles des entiers relatifs, des entiers relatifs non nuls
- $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_*$  ..... Ensembles des rationnels, des rationnels non nuls
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}_*, \mathbb{R}_+$  ..... Ensembles des réels, des réels non nuls, des réels positifs
- $\mathbb{C}, \mathbb{C}_*$  ..... Ensembles des complexes, des complexes non nuls

## – Théorie des groupes

- $F(S)$  ..... Le groupe libre engendré par la famille finie  $S$
- $\ker(\phi)$  ..... Le noyau de l'homomorphisme  $\phi$
- $G \cong \langle X \mid R \rangle$  ..... Présentation du groupe  $G$
- $H < G$  ou  $H \subset G$  .....  $H$  est un sous-groupe de  $G$
- $H \triangleleft G$  .....  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$
- $\langle X \rangle_G$  ou  $\langle X \rangle$  ..... Le groupe engendré par  $X$  dans  $G$
- $\text{gp}_G(X)$  ou  $\text{gp}(X)$  ..... Le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  contenant  $X$

- $g \sim h$  ..... Les éléments  $g$  et  $h$  sont conjugués
- $[g, h]$  ..... Le commutateur de  $g$  et  $h$
- $[G, G]$  ..... Sous-groupe commutateur de  $G$
- $\mathcal{Z}_G(g)$  ou  $\mathcal{Z}(g)$  ..... Centralisateur de  $g \in G$  dans  $G$
- $\mathcal{Z}(G)$  ..... Le centre de  $G$
- $G \times H$  ou  $G \oplus H$  ..... Produit direct de  $G$  et  $H$
- $G * H$  ..... Produit libre de  $G$  et  $H$
- $G \rtimes_{\phi} H$  ou  $G \rtimes H$  ..... Produit semi-direct de  $G$  par  $H$
- $\text{Aut}(G)$  ..... Groupe d'automorphismes de  $G$
- $\text{Inn}(G)$  ..... Groupe d'automorphismes intérieurs de  $G$
- $\text{Out}(G)$  ..... Groupe d'automorphismes extérieurs de  $G$
- **Groupes usuels**
- $\{1\}$  ..... Le groupe trivial
- $F_n$  ..... Le groupe libre de rang  $n$
- $\mathbb{Z}$  ..... Le groupe cyclique infini
- $\mathbb{Z}_n$  ..... Le groupe cyclique d'ordre  $n$
- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ..... Le groupe libre abélien de rang 2
- $\mathbb{Z}^n$  ..... Le groupe libre abélien de rang  $n$
- $S_n$  ..... Le groupe des permutations d'ordre  $n$
- $D_{2n}$  ..... Le groupe diédral d'ordre  $2n$
- $GL(n, K)$  ..... Le groupe général linéaire de degré  $n$  sur l'anneau  $K$
- $SL(n, K)$  ..... Le groupe spécial linéaire de degré  $n$  sur l'anneau  $K$
- $PSL(n, K)$  ..... Le groupe projectif spécial linéaire de degré  $n$  sur l'anneau  $K$
- **Topologie**
- $\text{int}(U)$  ..... Intérieur de  $U \subset X$
- $\text{adh}(U)$  ..... Adhérence de  $U \subset X$
- $\text{Int}(M)$  ..... Intérieur de la variété  $M$
- $\partial M$  ..... Bord de la variété  $M$
- $\pi_1(M)$  ..... Le groupe fondamental de la variété  $M$
- $H_1(M, K)$  ..... Le premier groupe d'homologie à coefficient dans  $K$
- $f_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$  ..... L'homomorphisme induit par une application continue  $f$
- $M/\Gamma$  ..... Espace des orbites de l'action de  $\Gamma$  sur la variété  $M$
- $\widetilde{M}$  ..... Le revêtement universel de  $M$
- $M \# N$  ..... Somme connexe des 3-variétés  $M$  et  $N$
- $I = [0, 1]$  ..... L'intervalle
- $S^0, S^1, S^2, S^3$  ..... Les sphères 0, 1, 2, 3-dimensionnelles
- $D^2$  ..... Le disque
- $B^3$  ..... La boule 3-dimensionnelle
- $S^1 \times I$  ..... L'anneau
- $S^1 \times S^1$  ..... Le tore
- $\mathbb{CP}_1$  ..... La droite projective complexe
- $\mathbb{RP}_2$  ..... Le plan projectif réel
- $\mathbb{KB}_2$  ..... La bouteille de Klein

- $\mathbb{P}_3$  ..... L'espace projectif réel de dimension 3
- **Géométrie de dimension 3**
- $\text{Isom}(X)$  ..... Groupe d'isométries de  $X$
- $\text{Isom}^+(X)$  ..... Groupe d'isométries de  $X$  préservant l'orientation
- $\mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3$  ..... Les 3-géométries de courbure constante
- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \widetilde{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1}$  ..... Les 3-géométries produits
- $\text{Sol}, \text{Nil}, \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  ..... Les 3-géométries twistées
- $X/\Gamma$  .....  $X$ -Espace-forme
- **Notations spécifiques**
- $\sigma_W(M)$  ..... 3-variété obtenue en coupant  $M$  le long de la surface  $W$ , p.30
- $r : \sigma_W(M) \longrightarrow M$  ..... Application d'identification, p.32
- $A *_\phi B$  ..... Produit amalgamé de  $A$  et  $B$  relativement à  $\phi$ , p.34
- $A *_C B$  ..... Produit amalgamé de  $A$  et  $B$  le long du sous-groupe  $C$ , p.34
- $A *_\phi$  ..... Extension HNN de  $A$  relativement à  $\phi$ , p.35
- $|g|$  ..... Longueur de l'élément  $g$  pour  $g \in A *_\phi B$ , ou  $g \in A *_\phi$ , pp.35,36
- $\mathcal{S}_X$  ..... Ensemble des sommets d'un graphe  $X$ , p.37
- $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_X^+$  ..... Ensembles des arêtes d'un graphe  $X$ , p.37
- $\text{o}, \text{e} : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{S}_X$  ..... Origine et extrémité d'une arête  $a \in \mathcal{A}_X$ , p.37
- $(\mathcal{G}, X)$  ..... Graphe de groupe, p.37
- $\mathcal{GS}_X$  ..... Ensemble des groupes de sommet de  $(\mathcal{G}, X)$ , p.37
- $\mathcal{GA}_X$  ..... Ensemble des groupes d'arête de  $(\mathcal{G}, X)$ , p.37
- $\phi_a : G_a \longrightarrow G_{\text{o}(a)}$  ..... Monomorphisme associé à  $(\mathcal{G}, X)$  pour  $a \in \mathcal{A}_X$ , p.37
- $\pi_1(\mathcal{G}, X)$  ..... Groupe fondamental du graphe de groupe  $(\mathcal{G}, X)$ , p.38
- $t_a$  ..... Lettre stable associée à l'arête  $a \in \mathcal{A}_X$ , p.38
- $(\mathcal{G}, X, T)$  ..... Graphe de groupe décomposé, p.38
- $G_s$  ..... Sous-groupe de sommet, p.38
- $G_a, G_a^-, G_a^+$  ..... Sous-groupes d'arête, p.39
- $\varphi_a : G_a^- \longrightarrow G_a^+$  ..... Isomorphisme associé à  $a \in \mathcal{A}(X)$ , p.39
- $\mathcal{Gen}(X)$  ..... famille génératrice canonique de  $\pi_1(\mathcal{G}, X)$ , p.40
- $\text{label}(\mathcal{C})$  ..... Label du trajet  $\mathcal{C}$ , p.54
- $\mathcal{C}(u, s)$  ..... Ensemble des labels des circuits en  $u$  d'origine  $s$ , p.54
- $\mathcal{C}(u)$  ..... Ensemble des labels des circuits en  $u$ , p.56
- $F(X)$  ..... Ensemble des fermés de l'espace topologique  $X$ , p.75
- $C(G)$  ..... Ensemble des sous-groupes fermés du groupe de Lie  $G$ , p.75
- $D(G)$  ..... Ensembles des sous-groupes discrets du groupe de Lie  $G$ , p.75
- $D_*(I^+(\mathbb{H}^3))$  ..... Ensemble des sous-groupes discrets sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , p.76
- $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**}$  ..... Espaces des 3-variétés hyperboliques, p.76
- $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^{**}$  ..... Espaces des 3-variétés hyperboliques de volume fini, p.78
- $M_{[\varepsilon, \infty]}$  ..... Partie  $\varepsilon$ -épaisse de  $M$ , p.78
- $M_{[0, \varepsilon]}$  ..... Partie  $\varepsilon$ -fine de  $M$ , p.78
- $\text{lgr}_S(\omega)$  ..... Longueur d'un mot  $\omega$  sur la famille génératrice  $S$ , p.84

- $d_S$  ..... Métrique du mot pour la famille génératrice  $S$ , p.84
- $|g|$  ..... Longueur de l'élément  $g$  pour la métrique du mot, p.84
- $\Gamma(G, S)$  ..... Graphe de Cayley de  $G$  pour la famille génératrice  $S$ , p.85
- $N \subset \pi_1(M)$  ..... Fibre du groupe de Seifert  $\pi_1(M)$ , p.119
- $\Pi \subset \pi_1(M)$  ..... Sous-groupe canonique de  $\pi_1(M)$ , p.120
- $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$  ..... Surjection canonique p.123
- $\underline{\Pi} \subset \pi_1(M)/N$  ..... Sous-groupe canonique du groupe Fuchsien  $\pi_1(M)/N$ , p.125

# Index

- Ame d'un tube de Margulis, 99
- Anneaux essentiels
  - dans une variété hyperbolique de volume fini, 98
  - dans un fibré de Seifert, 127
- Arête, 36
  - $T$ -séparante, 37
  - non  $T$ -séparante, 37
- Arbre, 36
  - de Bass-Serre, 51
  - maximal, 36
- Base d'un espace fibré de Seifert, 115
- Britton (lemme de), 35
- Cayley (graphe de), 84
- Centralisateurs, 17
  - dans le groupe d'une variété Haken, 180
  - dans un graphe de groupe presque sans circuit, 172
  - dans un graphe de groupe sans circuit, 65
  - dans un groupe de Seifert infini, 126
  - dans un groupe Fuchsien cristallographique, 141
  - dans un groupe Fuchsien infini, 124
- Centre, 17
- Chemin
  - bi-infini, 84
  - dans le graphe de Cayley, 84
  - dans un graphe, 36
  - géodésique, 84
  - quasigéodésique, 87
- Circuit, 53
  - cycliquement réduit, 167
  - théorème fondamental, 57
  - trivial, 53
- Commutativité (théorème de)
  - dans un amalgame, 48
  - dans un graphe de groupe, 58
  - dans une extension HNN, 50
- Composante périphérale, 98
- Conjecture
  - de Géométrisation de Thurston, 22
  - de Seifert, 118
- Conjugaison (théorème de)
  - dans un amalgame, 48
  - dans un graphe de groupe, 60
  - dans une extension HNN, 49
- Constante de Margulis, 77, 99
- Convergence de représentations
  - algébrique, 79, 102
  - géométrique, 75
- Cusps, 78, 98
- Décomposition
  - JSJ, 30
  - Kneser-Milnor, 20
  - minimale, 31
  - triviale, 31
- Double
  - d'un groupe, 27, 63
  - d'une variété, 27
- Elément
  - $C$ -réduit, 89
  - $A$ -impair, 119
  - $A$ -pair, 119
  - elliptique, 101
  - exceptionnel, 170
  - loxodromique, 98–101
  - parabolique, 98, 100, 101
- Elément cycliquement réduit
  - dans un amalgame, 47

- dans une extension HNN, 49
- Espace
  - $\delta$ -hyperbolique, 85
  - fibré, 18
  - fibré de Seifert, 115
  - lenticulaire, 119
- Extension HNN, 34–35
- Fibration de Seifert, 116
- Fibre
  - d'un espace fibré de Seifert, 115
  - du groupe d'un fibré de Seifert, 118
  - exceptionnelle, 115
  - régulière, 115
- Foliation d'un triangle géodésique, 86
- Forme normale
  - dans un produit amalgamé, 33
  - dans une extension HNN, 35
- Forme réduite
  - dans un produit amalgamé, 34
  - dans une extension HNN, 35
- Géométrie 3-dimensionnelle, 21
- Graphe
  - connexe, 36
  - fini, 36
  - orienté, 36
- Graphe de groupe, 36
  - associé à une décomposition, 40
  - décomposé, 37
  - presque sans circuit, 169
  - sans circuit, 65
- Groupe
  - $\delta$ -hyperbolique, 85
  - automatique, 104
  - cristallographique, 136
  - d'arête, 36
  - de Baumslag-Solitar, 88
  - de sommet, 36
  - diédral, 124
  - fondamental
    - d'un fibré de Seifert, 118–166
    - d'un graphe de groupe, 37
    - d'une variété, 18
    - d'une variété Haken, 40
  - d'une variété hyperbolique de volume fini, 98, 107–113
  - Fuchsien, 122–125
  - hyperbolique selon Gromov, 85
  - Short-lex automatique, 105
  - strongly geodesically automatic, 105
- Homéomorphisme
  - associé à une décomposition, 31
  - préservant la fibration de Seifert, 115
- Hurewicz (application de), 119
- Indice d'une fibre exceptionnelle, 115
- Jaco-Shalen-Johansson (théorème), 29
- KBMAG, 104
- Label
  - d'un chemin du graphe de Cayley, 84
  - d'un trajet, 53
- Lacet
  - dans un graphe de groupe, 36
  - dans une variété, 18
- Longueur d'un élément pour la métrique du mot, 83
- Longueur d'une forme normale
  - dans un amalgame, 34
  - dans une extension HNN, 35
- Métrique du mot, 83
- Obturation de Dehn, 78, 80, 108
- Ordre de décomposition, 59
- Partie
  - épaisse de  $M$ , 77, 99
  - fine de  $M$ , 77, 99
- Pente de chirurgie, 80, 107
- Pièce élémentaire, 31
- Pinch, 35
- Présentation canonique
  - d'un groupe Fuchsien, 122
  - d'un groupe Fuchsien cristallographique, 136
  - du groupe d'un fibré de Seifert, 118

- du groupe d'un graphe de groupe, 39
- Problème
  - de l'isomorphisme, 23
  - de la conjugaison, 23
  - du mot, 23
  - du mot généralisé, 23
- Problèmes de Dehn, 23
- Procédure
  - de  $C$ -réduction, 90
  - de  $C$ -réductions jumelées, 91
  - de réductions cycliques successives, 59
- Produit amalgamé, 33–34
- Produit libre, 20
- Quasi-isométrie, 105
- Représentation d'holonomie, 75, 79
- Sommet, 36
- Sous-graphe de groupe, 38
  - $\prec$ -occurent, 59
- Sous-groupe
  - canonique
    - d'un groupe Fuchsien, 124
    - du groupe d'un fibré de Seifert, 119
  - commutateur, 17
  - d'arête, 38
  - de sommet, 37
  - discret
    - d'un groupe de Lie, 74
    - de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , 75, 98–102
  - loxodromique cyclique maximal, 99
  - normal cyclique, 118
  - parabolique maximal, 98, 102
- Sous-trajet, 64
- Sous-variété de Seifert, 32
- Structure de racines triviales, 66
- Surface, 18
  - à deux faces, 19
  - essentielle, 19
  - incompressible, 19
  - normale, 190
  - parallèle au bord, 19
  - proprement plongée, 19
- Système d'invariants d'une fibration de Seifert, 116
- Système périphéral, 40, 107
- Thurston (théorème d'hyperbolisation de), 22
- Thurston (théorème de chirurgie hyperbolique de), 80
- Topologie
  - de Chabauty, 74
  - géométrique, 75
- Tore solide fibré, 115
- Trajet, 52
  - inverse, 53
  - produit, 53
  - réduit, 65
  - théorème fondamental, 55
  - trivial, 52
- Triangle
  - $\delta$ -fin, 85
  - géodésique, 84
- Tube de Margulis, 78, 99
- Van-Kampen (théorème de), 34, 35, 40
- Variété, 18
- 3-variété, 18
  - $\delta$ -irréductible, 19
  - atoroïdale, 19
  - géométrique, 21
  - Haken, 19
  - hyperbolique de volume fini, 22
  - irréductible, 19
- Variété prisme, 119







**Résumé :** Nous donnons une solution complète au problème de conjugaison dans le groupe d'une 3-variété orientable vérifiant la conjecture de géométrisation de Thurston. On montre aisément que ce problème se réduit au cas d'une 3-variété fermée irréductible, qui est soit Haken, soit un espace fibré de Seifert. La plupart de ce travail est dévoué au cas haken.

Nous utilisons principalement la stratégie utilisée par Z.Sela dans le cas d'un groupe de noeud. Nous coupons la variété le long de tores essentiels, afin d'obtenir des pièces qui soient hyperboliques de volume fini, ou des espaces fibrés de Seifert. Nous montrons alors comment réduire le problème de conjugaison à des problèmes algorithmiques plus délicats, dans les groupes des pièces obtenues.

Dans le cas d'une pièce admettant une fibration de Seifert, son groupe fondamental  $\Gamma$  contient un sous-groupe normal cyclique  $N$ . Le groupe quotient  $\Gamma/N$  est Fuchsien. La résolution d'algorithmes dans  $\Gamma/N$  fournira les algorithmes nécessaires dans  $\Gamma$ .

Dans le cas d'une pièce  $M$  admettant une structure hyperbolique de volume fini, nous utilisons le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston pour montrer comment obtenir deux «bonnes» variétés hyperboliques  $M_1, M_2$ , obtenues par obturation de Dehn sur  $M$ . Les algorithmes nécessaires dans  $\pi_1(M)$  peuvent être réduits à des couples d'algorithmes analogues dans  $\pi_1(M_1)$  et  $\pi_1(M_2)$ , qui peuvent être résolus avec la théorie des groupes hyperboliques de Gromov ; ce qui fournit une solution dans  $\pi_1(M)$ .

**Mots-clefs :** Problèmes de Dehn, groupe fondamental, décomposition JSJ, graphes de groupe, variété hyperbolique, théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston, topologie géométrique, espaces fibrés de Seifert, groupes  $\delta$ -hyperboliques, groupes Fuchsien.

**Abstract :** We give a complete solution for the conjugacy problem in oriented compact 3-manifold satisfying Thurston geometrization conjecture, groups. It is easily shown, that this problem reduces to the case of a closed irreducible oriented manifold, which is either Haken or a Seifert fibered space. The main part of this work, is devoted to the Haken closed case.

We essentially make use of the strategy used by Z.Sela in the case of a knot group. We cut the manifold along essential tori, to obtain pieces which are either hyperbolic of finite volume, or Seifert fibered spaces. We show how to reduce the conjugacy problem to (harder) algorithmic problems in the groups of the pieces obtained.

In the case of a piece admitting a Seifert fibration, its fundamental group  $\Gamma$ , contains a cyclic normal subgroup  $N$ , and the quotient group  $\Gamma/N$  is Fuchsian. Algorithms in  $\Gamma/N$  will supply solutions in  $\Gamma$ .

In the case of a finite volume hyperbolic piece  $M$ , we make use of the Thurston hyperbolic surgery theorem to show how one can obtain two "good" closed hyperbolic manifolds  $M_1, M_2$  by surgery on  $M$ . The algorithms needed in  $\pi_1(M)$  can be reduced to two couples of similar algorithms in  $\pi_1(M_1)$  and  $\pi_1(M_2)$ , which can be solved using Gromov's word-hyperbolic group theory ; giving solutions in  $\pi_1(M)$ .

**Key-words :** Dehn Problems, fundamental group, JSJ decomposition, graph of groups, hyperbolic manifold, Thurston's hyperbolic surgery theorem, geometric topology, Seifert fibered spaces, word-hyperbolic groups, Fuchsian groups.